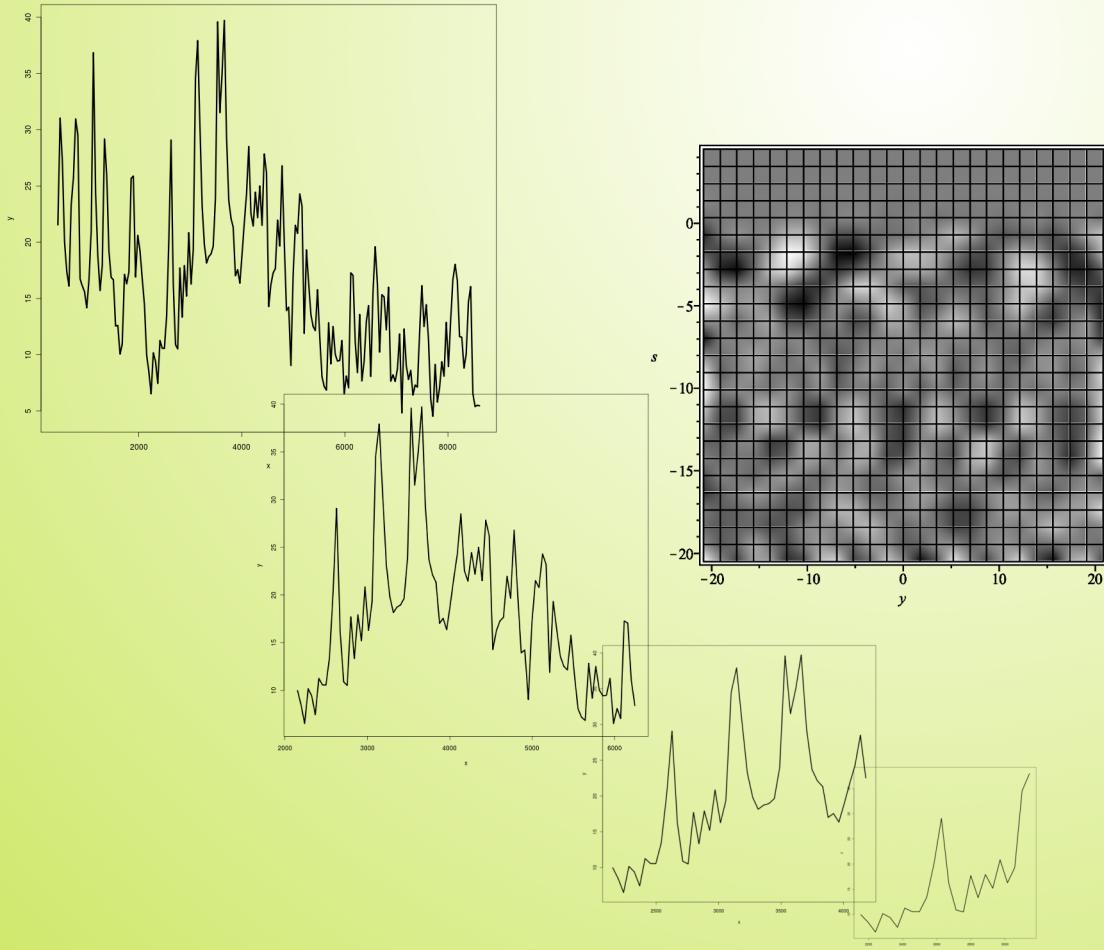


Wavelets og anvendelser

Jan Scholtyssek

Vejleder/tutor: Bergfinnur Durhuus

28. oktober 2011



Abstract

Dansk: Dette bachelorprojekt indeholder en gennemgang af de grundlæggende begreber i wavelet- og Multi Resolutions Analyse (MRA)-teorien, heriblandt konstruktionen af wavelet-funktioner ud fra skaleringsfunktionen hørende til en MRA. Derefter gennemgås nødvendige og tilstrækkelige betingelser for at en funktion ψ , hvis Fourier-transformerede $\hat{\psi}$ har støtte i et kompakt interval, er en ortonormal wavelet.

Betingelser for konvergensen i $L^p(\mathbb{R})$ -normen og punktvist konvergens af projektioner på wavelet- og skaleringsfunktions-baser præsenteres for funktioner $f \in L^p(\mathbb{R})$.
Afslutende uddes en dekompositions- og rekonstruktions-algoritme for diskrete signaler. Der gøres rede for dens anvendelsesområder og effektivitet vha. anvendelsen af algoritmen på billeder og der gives eksempler på skalingsfunktioner og wavelets med forskellige egenskaber og anvendelsesområder.

English: This thesis contains a presentation of the basic concept of the Wavelet- and Multi Resolution Analysis (MRA)-theory, including construction of wavelet-functions through the scalingfunction related to a MRA. Then necessary and sufficient conditions are presented for a function ψ , whose Fourier-transformed $\hat{\psi}$ has support on a compact interval, to be an orthonormal wavelet.

Results about the convergence in the $L^p(\mathbb{R})$ -norm and pointwise convergence are shown for projections onto scalingfunction- and wavelets-bases for functions $f \in L^p(\mathbb{R})$.

Finally, a decomposition- and reconstruction-algorithm for discrete signals is derived and its applications and efficiency are presented through an example, where the algorithm is applied to a picture. Examples of scalingfunctions and wavelets are presented and their properties and applications are discussed.

Forord

Dette bachelor-projekt giver en kort introduktion til wavelet- og MRA-teorien. Der er nogle krav til læseren for at kunne følge argumentationen. Der forudsættes grundlæggende kendskab til

- Målt- og integral-teori
- Hilbertrum / indre produktrum
- Fourier-transformation

Der bruges følgende konventioner i dette projekt:

Vi bruger symbolet χ_M for at betegne indikatorfunktionen for mængden M .

Det indre produkt for $L^2(\mathbb{R})$ er defineret som

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx \quad f, g \in L^2(\mathbb{R})$$

og det indre produkt for $L^2([-\pi, \pi])$ er defineret som

$$\langle f, g \rangle_{L^2([-\pi, \pi])} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx \quad f, g \in L^2([-\pi, \pi])$$

Dette projekt har sit udgangspunkt i bogen ”A First Course on Wavelets” af E. Hernández og G. Weiss (i det følgende [HW]), som alle beviser (i modificeret form) er taget fra.

God fornøjelse med læsningen.

Indhold

1	Internettets udfordringer	1
2	MRA - Multi Resolution Analysis	1
2.1	Definitioner og et lemma	1
2.2	Fra skaleringsfunktion til wavelet	4
3	Fuldstændighed	10
4	Konvergens	15
5	DWT - Diskret Wavelet Transformation	23
5.1	Algoritmer	25
6	Eksempler	30
6.1	Haar-wavelet	30
6.2	Daubechies-wavelets	31
6.3	Shannon-wavelet	32
6.4	Lemarié-Meyer-wavelets	33
7	Appendix	34
7.1	Tal-eksempel - et 4x4-billede	34
8	Bibliografi	36

1 Internettets udfordringer

En af de største udfordringer for nettet, videnskaben og informationssamfundet er de enorme mængder data, der skabes, skal transporteres og lagres. Tidlige muligheder for kompression af data har siden opfindelsen af bogtrykket været mindre bogstaver på tyndere papir. Da computeren og dermed den elektroniske databehandling blev udviklet, skulle der bruges nye former for kompression. Disse nye kompressionsformer er algoritmer, dels specialet tilfælde af matematiske teorier, dels udgangspunktet for udviklingen af nye teorier. Transformationer spiller en vigtig rolle i kompressionen af data, ved at afbilde funktioner og signaler på andre rum, i håb om at disse ”fylder mindre” i rummet, f.eks. har kompakt støtte.

Hvis vi betragter et signal, det kunne f.eks. være et lydsignal hvor amplituden aftastes 100 gange pr. sekund¹, transformerer signalet, f.eks. ved at beregne Fourierrekken, og bagefter fjerner alle Fourier-koefficienter der er mindre end en fastlagt værdi, kan vi komprimere signalet ved at gennem de tilbageværende Fourier-koefficienter.

Men Fourier-transformationen er ikke altid det bedste valg. Lad os antage at vi er seismologer og skal analysere et jordskælv. Vi har data og har brug for at vide hvilke frekvenser der optræder i skælvet på forskellige tidspunkter. Ud over at sinus-svingninger ligner udslaget af en seismograf ret dærligt, så kan vi med en almindelig Fourier-transformation kun give et globalt billede af udslagene. En metode der blev udviklet for at undgå dette problem er Short-time-Fourier-transformation, der deler signalet op i lige store stykker og analyserer dem hver for sig.

En nyere metode bygger på wavelets og ”Multi Resolution Analysis”, som giver os redskaber til at studere en funktion/et signal på forskellige detalje-trin. Det skal vi se nærmere på nu.

2 MRA - Multi Resolution Analysis

Definition 2.1. En MRA (Multi Resolution Analyse) er en voksende følge $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ af afsluttede underrum af $L^2(\mathbb{R})$ der opfylder

$$V_j \subset V_{j+1} \quad (2.1)$$

$$f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(2^j x) \in V_j \quad \forall j \in \mathbb{Z} \quad (2.2)$$

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\} \quad (2.3)$$

$$\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}) \quad (2.4)$$

$$\exists \varphi \in V_0, \text{ så } \{\varphi(x - k) \mid k \in \mathbb{Z}\} \text{ er en ortonormalbasis for } V_0 \quad (2.5)$$

Ved at kombinere (2.2) og (2.5) er $\{2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j x - k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ en ortonormalbasis for V_j (faktoren $2^{\frac{j}{2}}$ er nødvendig for normaliseringen). Funktionen φ kaldes en skaleringsfunktion.

¹Signalet i vores lydfiler er normalt aftastet 44.100 gange pr. sekund

Betingelserne er ikke uafhængige: F.eks. medfører (2.1), (2.2) og (2.5) at underrummene V_j kun har nulelementet tilfølles, et bevis kan findes i [HW] (afsnit 2.1, sætning 1.6).

Hvad er en ortonormal wavelet?

Definition 2.2. En ortonormal wavelet er en funktion $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ sådan at $\{2^{\frac{j}{2}}\psi(2^jx - k) \mid j, k \in \mathbb{Z}\}$ er en ortonormalbasis for $L^2(\mathbb{R})$.

Funktionerne i $\{2^{\frac{j}{2}}\psi(2^jx - k) \mid j, k \in \mathbb{Z}\}$ frembringes af ψ ved skalering og translation. Den ortonormal basis $\{e^{ikt} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ for $L^2(-\pi, \pi)$, relateret til Fourier-transformationen, frembringes kun ved skalering. Jo større skaleringsfaktoren k er, jo større er også frekvensen. Vi vil derfor i det følgende også omtale skaleringen som frekvens. Det skal dog bemærkes at ψ ikke generelt er periodisk.

Vi bemærker også at vores teori udvikles i $L^2(\mathbb{R})$ og funktionerne dermed har en Fourier-transformerede der også ligger i $L^2(\mathbb{R})$. Det gør det muligt at definere vores ortonormale wavelets enten direkte eller ved deres Fourier-transformerede som vi vil gøre i sætning 2.5.

Vi bruger i dette projekt \hat{g} for at betegne Fourier-transformationen for en funktion $g \in L^2(\mathbb{R})$ som er defineret ved

$$\hat{g}(t) = \int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-ixt}dx \quad (2.6)$$

Vi introducerer en funktion $m_0(t)$ der kaldes for φ 's lavpasfilter. Der gælder nemlig

$$\hat{\varphi}(2t) = m_0(t)\hat{\varphi}(t) \quad \text{for n.a. } t \in \mathbb{R} \quad (2.7)$$

som vi skal se i lemma 2.6. Lad f.eks. $\hat{\varphi}$ have støtten $(0, b)$ så har $m_0(t)\hat{\varphi}(t)$ støtten $(0, b/2)$. m_0 er defineret ved

$$m_0(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ikt}$$

$$a_k := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{1}{2}x\right) \overline{\varphi(x+k)} dx$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} \varphi\left(\frac{1}{2}x\right) \overline{\varphi(x+k)} dx \right|^2 \leq \left\| \frac{1}{2} \varphi\left(\frac{1}{2}x\right) \right\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$$

hvor sidste lighedstæn følger af at $\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{1}{2}x\right)$ er en ortonormalbasis for V_{-1} . Heraf følger nu at summen, der definerer m_0 konvergerer i $L^2([-\pi, \pi])$, if. sætning 4.11 i [NY]. $m_0(t)$ er 2π -periodisk (da e^{ikt} er det) og opfylder følgende ligning:

$$|m_0(t)|^2 + |m_0(t+\pi)|^2 = 1 \quad \text{for n.a. } t \in \mathbb{R}$$

Vi vil bruge ligningen i nogle af de følgende beviser. Den følger ved at bruge det efterfølgende lemma 2.3 med $g = \varphi$. Ved så at bruge (2.7) og dele summen op i lige og ulige indeks, kan man trække m_0 udenfor summen og bemærke at summerne er lige med 1, da φ er et ortonormalt system.

Lemma 2.3. Lad $g \in L^2(\mathbb{R})$. Så er $\{g(x-k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ et ortonormalt system hvis og kun hvis

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(t+2\pi k)|^2 = 1 \quad (2.8)$$

for næsten alle $t \in \mathbb{R}$

Bevis: Princippet i beviset er at vi bruger definitionen af ortonormalitet og viser at Fourier-rækken for (2.8) er lige med 1 for n.a. $t \in \mathbb{R}$.

” \Rightarrow “ Lad g være som i lemmaet, så er det indre produkt for to funktioner $g(x-l)$ og $g(x-k)$ i det ortonormale system 1, hvis og kun hvis $l = k$. For $l = 0$:

$$\delta_{0,k} = \int_{\mathbb{R}} g(x) \overline{g(x-k)} dx$$

Ved nu at Fourier-transformerne de to funktioner, bruge at den Fourier-transformerede for $g(x-k)$ er $\hat{g}(t)e^{-ikt}$ og at Fourier-transformationen bevarer det indre produkt får vi

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} g(x) \overline{g(x-k)} dx &= \int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(t)|^2 e^{ikt} dt \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} |\hat{g}(t + 2\pi m)|^2 e^{ikt} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(t + 2\pi m)|^2 \right) e^{ikt} dt \end{aligned}$$

Dette er udtrykket for Fourier-koefficienterne for funktionen $\sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(t + 2\pi m)|^2$, som kun er 0 for $k \neq 0$ og 1 for $k = 0$, dvs. Fourier-rækken for summen er lige med 1. $\{\chi_{[0, 2\pi)} |\hat{g}(t + 2\pi m)|^2 e^{ikt}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ er en følge af målelige funktioner og da der gælder at

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{[0, 2\pi)} |\hat{g}(t + 2\pi m)|^2 e^{ikt} dt = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{[0, 2\pi)} |\hat{g}(t + 2\pi m)|^2 dt = \|\hat{g}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 < \infty$$

folger det af sætning 7.10 i [EH] (en modificeret form af Lebesgues majorant sætning) at summation og integration kan byttes om.

” \Leftarrow “ Ved at vende argumentationen om, startende med (2.8), hvor højresiden tolkes som Fourier-række, viser man at g er et ortonormalt system. ■

Da vi har $V_j \subset V_{j+1}$ og $V_{j+1} \in L^2(\mathbb{R})$ kan vi definere det ortogonale komplement W_j af V_j i V_{j+1} , og da V_j er afsluttet kan vi skrive V_{j+1} som direkte sum:

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \quad (2.9)$$

På samme måde kan V_j skrives som $V_{j-1} \oplus W_{j-1}$, og endelig $V_j = V_0 \oplus \bigoplus_{k=0}^{j-1} W_k$ for $j \geq 1$ og mere generelt

$$V_j = V_N \oplus \bigoplus_{k=N}^{j-1} W_k \quad \text{for } N < j \quad (2.10)$$

Da $W_k \cap W_l = \{0\}$ for $k \neq l$ og W_j er afsluttet kan $L^2(\mathbb{R})$ skrives som direkte sum

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} W_k \quad (2.11)$$

For en funktion $f \in L^2(\mathbb{R})$ vil vi definere projekionerne P_j og Q_j af f på hhv. V_j og W_j .

Definition 2.4. For $f \in L^2(\mathbb{R})$ er projektionsoperatorne P_j og Q_j på hhv. V_j og W_j givet ved

$$P_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k} \quad (2.12)$$

$$Q_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k} \quad (2.13)$$

Det er klart at P_j og Q_j er projektionsoperatorer, da de opfylder hhv. $P_j^2 = P_j$ og $Q_j^2 = Q_j$ (er idempotente). Faktisk er P_j og Q_j lineære operatorer der er selvadjungerede og har norm 1, dvs. de er ortonormale projektorer. Det skal vi bruge senere, da der så gælder at $\|P_j f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$ og $\|Q_j f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$.

2.2 Fra skaleringsfunktion til wavelet

Vi ønsker nu at finde en funktion ψ så $\{\psi(x - k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ er en ortonormalbasis for W_0 . Denne funktion er tæt relateret til φ ved følgende sætning, dette afsnits hovedresultat:

Sætning 2.5. Lad φ være en skaleringsfunktion for en MRA $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ og lad m_0 være det tilhørende lowpass-filter. Så er en funktion $\psi \in W_0$ en ortonormal wavelet for $L^2(\mathbb{R})$ hvis og kun hvis

$$\hat{\psi}(2t) = e^{it\nu(2t)} \overline{m_0(t + \pi)} \hat{\varphi}(t), \quad n.a. t \in \mathbb{R}$$

for en 2π -periodisk, målelig funktion ν for hvilken der gælder $|\nu(t)| = 1$ for næsten alle $t \in \mathbb{R}$.

Denne sætning vil vi bevise i resten af dette afsnit. Lad os dog først se på et standard-eksempel og give en motivation for, hvorfor vi interesserer os for ψ og hvilke egenskaber vi er interesseret i.

Et standard-eksempel på en MRA er underrummenne V_j bestående af de funktioner der er stykvist konstante på $\{[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)] \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Nedenfor er vist to eksempler på funktioner i hhv. V_0 og V_1 . Det er let at inde i betegnelsene $V_j \subset V_{j+1}$ og $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$ er opfyldt. Betingelsen $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ følger af at den eneste funktion der er konstant på hele \mathbb{R} og tilhører $L^2(\mathbb{R})$ er mul-funktionen. At $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$ følger af konstruktionen af målelige funktioner ved brug af simple funktioner. Konstruktionen kan bl.a. findes i bogen "Measure Theory" [EH] af Ernst Hansen.

Skaleringsfunktionen for denne MRA er indikator-funktionen for intervallet $[0, 1]$, $\varphi_{Haar}(x) = \varphi_{0,0}(x) = \chi_{[0,1]}(x)$. Det ortonormale system $\{\varphi_{Haar}(x - k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ blev først beskrevet som et ortonormalt system af Alfred Haar, dengang uden brug af MRA-teorien, som først blev udviklet senere.

For at vi kan bevise sætning 2.5, har vi brug for nogle egenskaber ved W_0 , som lettest vises ved at give en karakterisering af funktionerne der ligger i hhv. V_{-1} og V_0 . Vi har følgende lemma:

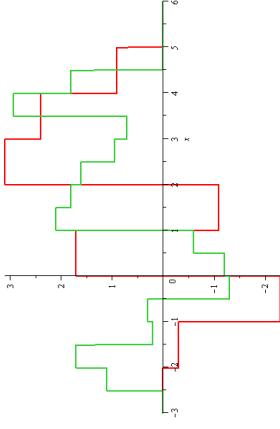
Lemma 2.6. Lad φ være en skaleringsfunktion for en 2π -periodisk funktion $m(t) \in L^2([-\pi, \pi])$, $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ikt}$, med $a_k = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \varphi(\frac{1}{2}x) \varphi(x + k) dx$. Så er

$$\hat{\varphi}(2t) = \hat{\varphi}(t)m_0(t) \quad (2.14)$$

og

$$V_{-1} = \{f \mid \hat{f}(t) = m(2t)m_0(t)\hat{\varphi}(t) \text{ for en } 2\pi\text{-periodisk funktion } m(t) \in L^2([-\pi, \pi])\} \quad (2.15)$$

$$V_0 = \{f \mid \hat{f}(t) = l(t)\hat{\varphi}(t) \text{ for en } 2\pi\text{-periodisk funktion } l(t) \in L^2([-\pi, \pi])\} \quad (2.16)$$



Figur 1: En funktion fra V_0 (red/mørk) og en funktion fra V_1 (grøn/lys) fra en MRA relateret til Haar-skaleringsfunktionen $\varphi(x) = \chi_{[0,1]}(x)$

Bewis: Første påstand følger ved at skrive $\frac{1}{2}\varphi(\frac{1}{2}x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \varphi(x+k)$, hvor a_k er som i lemmaet. Denne omskrivning er muligt da $\frac{1}{2}\varphi(\frac{1}{2}x)$ ligger i V_{-1} (er skaleringsfunktion for V_{-1}), og dermed også ligger i V_0 . $\frac{1}{2}\varphi(\frac{1}{2}x)$ kan derfor skrives som en række-udvikling i basis-elementerne for V_0 . Ved nu at Fourier-transformere begge sider, fås:

$$\hat{\varphi}(2t) = \hat{\varphi}(t) \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ikt} = \hat{\varphi}(t)m_0(t)$$

hvor $m_0(t)$ er som beskrevet i lemmaet. Der er brugt at den Fourier-transformerede for $\varphi(x+k)$ er $\hat{\varphi}(t)e^{ikt}$ og at Fourier-transformationen bevarer indre produkt, så summen konvergerer i $L^2([0, 2\pi])$ -norm og dermed er $\hat{\varphi}(2t)$ er velfdefineret og ligger i $L^2(\mathbb{R})$ da

$$\begin{aligned} \|\hat{\varphi}(2t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|\hat{\varphi}(2t)\|_{L^2([2\pi k, 2\pi(k+1))]}^2 \\ &= 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|m_0(t)\hat{\varphi}(t)\|_{L^2([2\pi k, 2\pi(k+1))]}^2 \\ &\leq 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|m_0(t)\|_{L^2([2\pi k, 2\pi(k+1))]}^2 \|\hat{\varphi}(t)\|_{L^2([2\pi k, 2\pi(k+1))]}^2 \\ &= 2\pi \|m_0(t)\|_{L^2([0, 2\pi))}^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|\hat{\varphi}(t)\|_{L^2([2\pi k, 2\pi(k+1))]}^2 \\ &= \|m_0(t)\|_{L^2([0, 2\pi))} \|\hat{\varphi}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} < \infty \end{aligned}$$

Dette viser første påstand.

Lad nu $f \in V_{-1}$. Så kan f skrives som

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi\left(\frac{1}{2}x - k\right)$$

for en passende folge $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2$, hvor ℓ^2 er rummet af kvadratisk summable folger. Ved at Fourier-transformere f får vi:

$$\hat{f}(t) = \sqrt{2} \hat{\varphi}(2t) \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-ikt} = m(2t)m_0(t)\hat{\varphi}(t)$$

hvor $m(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-ikt}$, som tydeligt er 2π -periodisk og ligger i $L^2([-\pi, \pi])$. Alle funktioner i V_{-1} kan altså skrives på den måde, som angivet i lemmaet. At alle funktioner

på den form også ligger i V_{-1} ses ved at starte med en funktion $\hat{f}(t) = m(2t)m_0(t)\hat{\varphi}(t)$ og regne bagøns. Kravet om at $m(t)$ skal være 2π -periodisk og ligge i $L^2([0, 2\pi])^2$ er nødvendigt for at enhver funktion på formen $m(2t)m_0(t)\hat{\varphi}(t)$ ligger i $L^2(\mathbb{R})$, for så er $m(2t)m_0(t)$ 2π -periodisk og der gælder

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |m(2t)m_0(t)\hat{\varphi}(t)|^2 dt &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} |m(2t)m_0(t)|^2 |\hat{\varphi}(t + 2\pi k)|^2 dt \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} |m(2t)m_0(t)|^2 dt \int_0^{2\pi} |\hat{\varphi}(t + 2\pi k)|^2 dt \\ &= 2\pi \|m(2t)m_0(t)\|_{L^2([0, 2\pi])}^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} |\hat{\varphi}(t + 2\pi k)|^2 dt \\ &= 2\pi \|m(2t)m_0(t)\|_{L^2([0, 2\pi])}^2 \int_0^{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(t + 2\pi k)|^2 dt \\ &= (2\pi)^2 \|m(2t)m_0(t)\|_{L^2([0, 2\pi])}^2 < \infty \end{aligned}$$

Vi har her brugt sætning 2.3 og Cauchy-Schwartz-ulykeden og ombytning af summation og integration følger af at $\hat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R})$ og vi dermed kan bruge sætning 7.10 i [EH]. Det viser at V_{-1} består af de funktioner f hvor den Fourier-transformerede \hat{f} har formen $m(2t)m_0(t)\hat{\varphi}(t)$ med en $L^2([- \pi, \pi])$, 2π -periodisk funktion m .
Proceduren gentages for V_0 med $\{\varphi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ som basis-elementer. ■

Vi vil nu finde en karakterisering af funktionerne i V_{-1} . Da vi har $V_0 = V_{-1} \oplus W_{-1}$, og vi lige har fundet en karakterisering af funktionerne i V_{-1} og V_0 , skal vi såge efter funktioner hvor den Fourier-transformerede har formen $l(t)\hat{\varphi}(t)$, hvor l er som beskrevet i lemma 2.6, og hvor det indre produkt med enhver funktion på formen $m(2t)m_0(t)\hat{\varphi}(t)$ er 0, per definition af det ortogonale komplement. Dvs.

$$0 = \int_{\mathbb{R}} l(t) \overline{m(2t)m_0(t)} |\hat{\varphi}(t)|^2 dt$$

Ved at summere over de hele tal og tilpasse integrationsgrænserne får vi

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} l(t) \overline{m(2t)m_0(t)} |\hat{\varphi}(t)|^2 dt \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} l(t + 2\pi k) \overline{m(2t + 4\pi k)m_0(t + 2\pi k)} |\hat{\varphi}(t + 2\pi k)|^2 dt \end{aligned}$$

Vi vil nu bruge at l , m og m_0 er 2π -periodiske og . Da vi ved at $\{\varphi(x + k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ er en ortonormalbasis for V_0 og dermed specielt et ortonormalt system kan vi bruge lemma 2.3

²Kravet om at $m(t)$ skal ligge i $L^2([0, 2\pi])$ er ekvivalent med at $m(t)$ skal ligge i $L^2([- \pi, \pi])$ hvis $m(t)$ er 2π -periodisk

med $g = \varphi$. Vi får så

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{2\pi} l(t) \overline{m(2t)m_0(t)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(t + 2\pi k)|^2 dt \\ &= \int_0^{2\pi} l(t) \overline{m(2t)m_0(t)} dt \\ &= \int_0^\pi l(t) \overline{m(2t)m_0(t)} dt + \int_\pi^{2\pi} l(t) \overline{m(2t)m_0(t)} dt \\ &= \int_0^\pi l(t) \overline{m(2t)m_0(t)} dt + \int_0^\pi l(t + \pi) \overline{m(2t)m_0(t + \pi)} dt \\ &= \int_0^\pi \overline{m(2t)} \left(l(t) \overline{m_0(t)} + l(t + \pi) \overline{m_0(t + \pi)} \right) dt \end{aligned}$$

Da det skal gælde for alle 2π -periodiske funktioner m , må

$$l(t) \overline{m_0(t)} + l(t + \pi) \overline{m_0(t + \pi)} = 0$$

Dvs. der findes en funktion λ så

$$\begin{pmatrix} l(t) \\ l(t + \pi) \end{pmatrix} = \lambda(t) \begin{pmatrix} \overline{m_0(t + \pi)} \\ -\overline{m_0(t)} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

λ må altså opfylde

$$\lambda(t) = \frac{l(t)}{m_0(t + \pi)} = -\frac{l(t + \pi)}{m_0(t)}$$

Vi kan altså se at λ er 2π -periodisk og opfylder $\lambda(t) = -\lambda(t + \pi)$.

Dermed får vi at λ må være på formen $\lambda(t) = e^{it}s(2t)$ for en 2π -periodisk funktion s . Så far vi fra (2.17) at $l(t) = \lambda(t) \overline{m_0(t + \pi)} = e^{it}s(2t) \overline{m_0(t + \pi)}$. Vi får dermed at W_{-1} er rummet af funktioner $f \in L^2(\mathbb{R})$ hvor $\hat{f} = l(t)\hat{\varphi}(t)$ for en 2π -periodisk funktion og hvor $l(t) = e^{it}s(2t)\overline{m_0(t + \pi)}$.

Af denne udledning for W_{-1} følger også karakteriseringen for W_j ved at bruge betingelse (2.2) fra MRA-definitionen (definition 2.1):

Lemma 2.7. *Lad φ være en skaleringsfunktion for en MRA $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ og lad m_0 være det tilhørende lowpass-filter. Så er*

$$\begin{aligned} W_j &= \{f \mid \hat{f}(2^{j+1}t) = e^{it}s(2t)\overline{m_0(t + \pi)}\hat{\varphi}(t) \text{ for en } 2\pi\text{-periodisk funktion } s \in L^2([-\pi, \pi])\} \\ &\quad (2.18) \end{aligned}$$

Vi er nu klar til at bevise sætning 2.5:

Bevis for sætning 2.5: Vi viser først at $\psi \in W_0$ og ψ er en ortonormal wavelet hvis

$$\hat{\psi}(2t) = e^{it\nu}(2t)\overline{m_0(t + \pi)}\hat{\varphi}(t), \quad n.a. t \in \mathbb{R}$$

og $|\nu(t)| = 1$, hvor ν er en 2π -periodisk funktion.

Det er klart at $\psi \in W_0$, da $\psi(2t)$ er på formen $e^{it}s(2t)\overline{m_0(t + \pi)}\hat{\varphi}(t)$. Vi har ligetil vist (lemma 2.7) at alle funktioner af den form tilhører W_0 for en 2π -periodisk funktion $s \in L^2([-\pi, \pi])$.

Vi vil vise at $\psi_{0,k} = \{\psi(x-k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ er et ortonormalt system for W_0 . Dertil bruger vi lemma 2.3 med $\hat{g} = \hat{\psi}$, bruger $\hat{\psi}(2t) = e^{it}\nu(2t)m_0(t+\pi)\hat{\varphi}(t)$ og at normen for både $e^{it}\nu(2t)$ er 1:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(t+2k\pi)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(\frac{1}{2}t+k\pi)|^2 |m_0(\frac{1}{2}t+k\pi+\pi)|^2$$

Vi deler summen op i lige og ulige indeks ved at lave et indeksskift $l = 2k$ i første sum og $l = 2k+1$ i anden sum. Ved at bruge at m_0 er 2π -periodisk, $|m_0(t)|^2 + |m_0(t+\pi)|^2 = 1$ og lemma 2.3, viser vi at summen er 1 og dermed at $\psi_{0,k} = \{\psi(x-k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ er et ortonormalt system:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(t+2k\pi)|^2 &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\frac{1}{2}t+2l\pi)|^2 |m_0(\frac{1}{2}t+2l\pi+\pi)|^2 \\ &\quad + \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\frac{1}{2}t+2l\pi+\pi)|^2 |m_0(\frac{1}{2}t+2l\pi+2\pi)|^2 \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\frac{1}{2}t+2l\pi)|^2 |m_0(\frac{1}{2}t+\pi)|^2 \\ &\quad + \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\frac{1}{2}t+2l\pi+\pi)|^2 |m_0(\frac{1}{2}t)|^2 \\ &= |m_0(\frac{1}{2}t+\pi)|^2 \underbrace{\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\frac{1}{2}t+2l\pi)|^2}_1 \\ &\quad + |m_0(\frac{1}{2}t)|^2 \underbrace{\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\frac{1}{2}t+2l\pi+\pi)|^2}_1 \\ &= |m_0(\frac{1}{2}t+\pi)|^2 + |m_0(\frac{1}{2}t)|^2 = 1 \end{aligned}$$

Dette viser at $\psi_{0,k} = \{\psi(x-k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ er et ortonormalt system.

Vi skal endnu vise at $\psi_{0,k} = \{\psi(x-k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ er en basis for W_0 . Lad derfor $g \in W_0$. Så følger det af lemma 2.7 at g har formen

$$\hat{g}(t) = \frac{s(t)}{\nu(t)} e^{it\frac{1}{2}\nu(t)} m_0(\frac{1}{2}t+\pi) \hat{\varphi}(\frac{1}{2}t)$$

med $s(t)$ som 2π -periodisk funktion. Ved at indsette ψ for $e^{it\nu(t)} \overline{m_0(\frac{1}{2}t+\pi)} \hat{\varphi}(\frac{1}{2}t)$ og gange med $\nu(t)\overline{\nu(t)}$ fås

$$\hat{g}(t) = \frac{s(t)}{\nu(t)} \nu(t) \overline{\nu(t)} \hat{\psi}(t) = s(t) \overline{\nu(t)} \hat{\psi}(t)$$

Da både s og ν ligger i $L^2([-\pi, \pi])$ følger det af Cauchy-Schwartz-uglegheden at også $s\overline{\nu}$ ligger i $L^2([-\pi, \pi])$ og derfor kan vi skrive $s(t)\overline{\nu(t)}$ som Fourier-række:

$$s(t)\overline{\nu(t)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-ikt}$$

Da $s\bar{v}$ er 2π -periodisk gælder dette for alle $t \in \mathbb{R}$ ved at bruge Fejér's sætning³ og dermed kan vi skrive den Fourier-transformerede for \hat{g} som

$$\begin{aligned} g(x) &= \hat{\tilde{g}} = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(t) e^{ixt} dt = \int_{\mathbb{R}} s(t) \bar{\nu}(t) \psi(t) e^{ixt} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikt} \hat{\psi}(t) e^{ixt} dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}(t) e^{ikt} e^{ixt} dt \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \psi(x+k) \end{aligned}$$

som viser at $\{\psi(x-k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ er en basis for W_0 . Sidste sum er konvergent i $L^2(\mathbb{R})$, da $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ligger i ℓ^2 og ψ er ortonormalt og ligger i $L^2(\mathbb{R})$.

På samme måde følger det for W_j med en funktion $g \in W_j$ og $\hat{g}(2^j t)$ på formen som i lemma 2.7 at $\{2^j \psi(2^j x - k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ er en basis for W_j . Og dermed følger det at $\{2^j \psi(2^j x - k) \mid j, k \in \mathbb{Z}\}$ er en ortonormalbasis for $L^2(\mathbb{R})$ da $L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j$. Vi har altså vist at ψ er et ortonormalt system og dermed en ortonormalbasis for W_j og dermed en ortonormal wavelet.

Vi viser nu at alle ortonormale wavelets ψ i W_0 har formen $\hat{\psi}(2t) = e^{it} \nu(2t) \overline{m_0(t+\pi)} \hat{\varphi}(t)$. Lemma 2.7 giver os at $\hat{\psi}(2t)$ skal have denne form med $\nu(2t)$ en 2π -periodisk funktion. Vi skal derfor kun vise at $|\nu(t)| = 1$ for næsten alle $t \in \mathbb{R}$. Vi bruger at $\{\psi(x-k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ skal opfylde (2.8) i lemma 2.3 for at være et ortonormals system:

$$1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(t+2k\pi)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \underbrace{|\nu(t+2k\pi)|^2}_{\nu(t)} |m_0(\frac{1}{2}t+k\pi+\pi)|^2 |\hat{\varphi}(\frac{1}{2}t+k\pi)|^2$$

Vi deler som for summen op i lige og ulige indeks:

$$\begin{aligned} 1 &= |\nu(t)|^2 \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} |m_0(\frac{1}{2}t+\pi)|^2 |\hat{\varphi}(\frac{1}{2}t+2l\pi)|^2 + \sum_{l \in \mathbb{Z}} |m_0(\frac{1}{2}t+2l\pi)|^2 |\hat{\varphi}(\frac{1}{2}t+2l\pi+\pi)|^2 \right) \\ &= |\nu(t)|^2 \left(\underbrace{|m_0(\frac{1}{2}t+\pi)|^2 \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\frac{1}{2}t+2l\pi)|^2 + |m_0(\frac{1}{2}t+2l\pi+\pi)|^2}_{1} \underbrace{\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\frac{1}{2}t+2l\pi+\pi)|^2}_{1} \right) \\ &= |\nu(t)|^2 \left(|m_0(\frac{1}{2}t+\pi)|^2 + |m_0(\frac{1}{2}t)|^2 \right) \\ &= |\nu(t)|^2 \end{aligned}$$

Altså er $|\nu(t)| = 1$ for n.a. $t \in \mathbb{R}$ og alle ortonormale wavelets i W_0 har formen

$$\hat{\psi}(2t) = e^{it} \nu(2t) \overline{m_0(t+\pi)} \hat{\varphi}(t)$$

³Se [NY] kapitel 5, Theorem 5.5

3 Fuldstændighed

Vi vil i dette afsnit vise at to enkle ligninger karaktererer alle ortonormale wavelets.

Sætningen er meget nyttig for at teste om en funktion er en ortonormal wavelet og gør det let at vægne en funktion der passer til den funktion eller dataseret som man vil analysere.

Vi begrænser os i det følgende til wavelets $\hat{\psi}$, hvor den Fourier-transformerede $\hat{\psi}$ har kompakt støtte. Lad støtten $\text{supp}(\hat{\psi})$ være indeholdt i $(-2^J\pi, 2^J\pi)$.

Vi vil så vise følgende sætning:

Sætning 3.1. *Lad $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ hvor $\hat{\psi}$ har en kompakt støtte og der findes $\mathcal{E} > 0$ så $\hat{\psi}(t) = 0$ for $t \in (-\mathcal{E}, \mathcal{E})$. Hvis $\{\psi_{j,k} \mid j, k \in \mathbb{Z}\}$ er et ortonormalt system for $L^2(\mathbb{R})$, så er systemet fuldstændigt (ψ en ortonormal wavelet) hvis og kun hvis*

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j t)|^2 = 1 \quad \text{for n.a. } t \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

$$\text{og} \quad \sum_{j=0}^{\infty} \overline{\hat{\psi}(2^j t)} \overline{\hat{\psi}(2^j(t+2q\pi))} = 0 \quad \text{for n.a. } t \in \mathbb{R}, q \in 2\mathbb{Z} + 1 \quad (3.2)$$

De to ligninger (3.1) og (3.2) kaldes for *basis-ligningerne*.

En funktions egenskab at f har støtte i en kompakt mængde kaldes vi i det følgende "band-limited". Vi begrænser os i det følgende til "band-limited"-wavelets, da vi vil bruge egenskaben for at gøre beviserne mere enkle, f.eks. i følgende lemma:

Lemma 3.2. *Antag at $f \in L^2(\mathbb{R})$ og at støtten for $\hat{f} \subset I = (a, b)$, hvor $b - a \leq 2^{-J}\pi$ og $I \cap [-\pi, \pi] = \emptyset$. Så gælder for alle $j \in \mathbb{Z}$*

$$(\hat{Q}_j f)(t) = \hat{f}(t) |\hat{\psi}(2^{-j}t)|^2 \quad \text{for n.a. } t \in I \quad (3.3)$$

For at kunne bevise lemmaet har vi brug for følgende sætning som vi kommer til at bruge en del gange i de følgende beviser:

Sætning 3.3. *Lad $f \in L^2(\mathbb{R})$ og ψ være en ortonormal wavelet. Da gælder*

1. f er orthogonal på W_j hvis og kun hvis

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(t + 2^{j+1}k\pi) \overline{\hat{\psi}(2^{-j}t + 2k\pi)} = 0 \quad \text{for n.a. } t \in \mathbb{R} \quad (3.4)$$

2. For projektionsoperatoren Q_j gælder:

$$(\hat{Q}_j f)(t) = \hat{\psi}(2^{-j}t) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(t + 2^{j+1}k\pi) \overline{\hat{\psi}(2^{-j}t + 2k\pi)} \quad \text{for n.a. } t \in \mathbb{R} \quad (3.5)$$

Et bevis for sætningen kan findes i [HW] afsnit 3.1 (sætning 1.7).

Bevis for lemma 3.2: Vi vil bruge sætning 3.3 og vise at summens elementer i punkt 2 er 0 for $k \neq 0$. Vi deler argumentationen op i $j \geq -J$ og $j < -J$, hvor J er valgt så støtten af \hat{f} er indeholdt i (a, b) med $b - a \leq 2^{-J}\pi$ og støtten af ψ er indeholdt i $(-2^J\pi, 2^J\pi)$ (vi forudsætter at der findes et J der opfylder denne betingelse).

$j \geq -J$: Antag at $t \in I$ og $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$. Så ligger $t + 2^{j+1}k\pi$ ikke i I , da vi har for hhv. $k > 0$ og $k < 0$

$$\begin{aligned} b = a + (b - a) &\leq a + 2^{-J}\pi \leq a + 2^{j+1}k\pi < t + 2^{j+1}k\pi & k > 0 \\ a = b - (b - a) &\geq b - 2^{-J}\pi \geq b + 2^{j+1}k\pi > t + 2^{j+1}k\pi & k < 0 \end{aligned}$$

Altså er $\hat{f}(t + 2^{j+1}k\pi) = 0$ for $k \neq 0$ og dermed $(Q_j f)(t) = \hat{f}(t)|\hat{\psi}(2^{-j}t)|^2$ for $j \geq -J$.

$j < -J$: Betingelsen $I \cap [-\pi, \pi] = \emptyset$ medfører for et punkt t i støtten af \hat{f} at $t \notin [-\pi, \pi]$, ekvivalent $|t| > \pi$, og dermed $|2^{-j}t| \geq 2^J|t| > 2^J\pi$.

Ved nu at bruge antagelsen om at ψ er "band-limited" har vi at $\hat{\psi}(2^{-j}t) = 0$ da vi lige har vist at $2^{-j}t$ ligger udenfor $(-2^J\pi, 2^J\pi)$. I det tilfælde skulle $(Q_j f)(t) = \hat{f}(t)|\hat{\psi}(2^{-j}t)|^2 = 0$ for $j < -J$ if. lemmaet og der gælder da også for $t + 2^{j+1}k\pi \in I$ at

$$|2^{-j}t + 2k\pi| \geq |2^Jt + 2^J2^{j+1}k\pi| \geq 2^J|t + 2^{j+1}k\pi| > 2^J\pi$$

Vi har i sidste uighed brugt at $|t + 2^{j+1}k\pi| \geq |t| > \pi$.

Det betyder at $\hat{\psi}(t + 2^{j+1}k\pi) = 0$ og derned følger det af sætning 3.3 punkt 2 at $(Q_j f)(t) = 0$.

■

Beweis for sætning 3.1 består af 3 dele:

- Vis at enhver ortonormal, "band-limited" wavelet ψ opfylder

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j t)|^2 = 1 \quad \text{for n.a. } t \in \mathbb{R}$$

- Vis at hver ortonormal, "band-limited" wavelet opfylder

$$\overline{\sum_{j=0}^{\infty} \hat{\psi}(2^j t) \hat{\psi}(2^j(t + 2q\pi))} = 0 \quad \text{for n.a. } t \in \mathbb{R}, q \in 2\mathbb{Z} + 1$$

- Herunder vise at for en ortonormal, "band-limited" wavelet, hvor $|\psi|$ er kontinuert i 0, er $\hat{\psi}(t) = 0$ for n.a. t i et åbent interval omkring origo.

- Antage ligning (3.1) og (3.2) og vise at ψ er en ortonormal wavelet.

Vi starter med første del:

Sætning 3.4. Hvis ψ er en "band-limited" ortonormal wavelet, så er

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j t)|^2 = 1 \quad \text{for n.a. } t \in \mathbb{R} \tag{3.6}$$

Bevis For at vise ligningen vil vi først sikre at summen konvergerer og derefter vise at den konvergerer mod 1. Summen $\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j t)|^2$ opfylder

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j(2^n t))|^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^{j+n} t)|^2 = \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^m t)|^2$$

med $m = j + n$. Den egenskab gør at vi kan nøjes med at vise sætningen for et vilkårligt interval der indeholder et interval af formen $(2^k t, 2^{k+1} t)$ med $k \in \mathbb{Z}$.

Vi vil derfor bruge lemma 3.2 og vil betragte intervallet I og en funktion \hat{f} som beskrevet i lemma 3.2, dvs. hvor den Fourier-transformerede \hat{f} har støtte i $I = (a, b)$ med $b - a \leq 2^{-J} \pi$.

Vi vil vise at $\sum_{j=-M}^M |\hat{\psi}(2^j t)|^2 \leq 1$ for alle $M \in \mathbb{Z}$. Ved at anvende ligningen i lemma 3.2 får vi

$$\int_I \sum_{j=-M}^M |(\hat{Q}_j f)(t)|^2 dt = \int_I |\hat{f}(t)|^2 \sum_{j=-M}^M |\hat{\psi}(2^j t)|^2 dt \leq \int_I |\hat{f}(t)|^2 dt$$

hvor sidste udledt følger af at Q_j er en projektionsoperator og derned opfylder

$$\|Q_j f\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

Derned følger at $\sum_{j=-M}^M |\hat{\psi}(2^j t)|^2 \leq 1$ for n.a. $t \in I$.

Vi viser endnu at summen konvergerer mod 1, ved at vise at $|\hat{f}(t)|^2 \left(1 - \sum_{j=-M}^M |\hat{\psi}(2^j t)|^2 \right)^2$ går mod 0 for $M \rightarrow \infty$, og da $|\hat{f}(t)|^2$ antages at være forskellig fra 0 på en delmængde af I med mål større end 0, må $\left(1 - \sum_{j=-M}^M |\hat{\psi}(2^j t)|^2 \right)^2 = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=-M}^M |\hat{\psi}(2^j t)|^2 = 1$ for n.a. $t \in I$.

Ved at integrere udtrykket får vi

$$\begin{aligned} \int_I |\hat{f}(t)|^2 \left(1 - \sum_{j=-M}^M |\hat{\psi}(2^j t)|^2 \right)^2 dt &= \int_I |\hat{f}(t) - \sum_{j=-M}^M |\hat{f}(t)| |\hat{\psi}(2^j t)|^2|^2 dt \\ &= \int_I |\hat{f}(t) - \sum_{j=-M}^M (\hat{Q}_j f)(t)|^2 dt \\ &= \|f(t) - \sum_{j=-M}^M (\hat{Q}_j f)(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \end{aligned}$$

Da vi ved at $L^2(\mathbb{R})$ -normen for $\hat{f} - \sum_{j=-M}^M \hat{Q}_j f$ konvergerer mod 0 for $M \rightarrow \infty$, dvs. $\liminf_{M \rightarrow \infty} \|f(t) - \sum_{j=-M}^M (\hat{Q}_j f)(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = 0$ (se også [HW], afsnit 3.1), kan vi med Fatous lemma slutte at $|\hat{f}(t) - \sum_{j=-M}^M (\hat{Q}_j f)(t)|^2 \rightarrow 0$ for $M \rightarrow \infty$ for n.a. $t \in I$:

$$\begin{aligned} 0 &= \liminf_{M \rightarrow \infty} \|f(t) - \sum_{j=-M}^M (\hat{Q}_j f)(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \liminf_{M \rightarrow \infty} \int_I |\hat{f}(t) - \sum_{j=-M}^M (\hat{Q}_j f)(t)|^2 dt \\ &\geq \int_I \liminf_{M \rightarrow \infty} |\hat{f}(t) - \sum_{j=-M}^M (\hat{Q}_j f)(t)|^2 dt \quad n.a. \quad t \in I \end{aligned}$$

■

Før vi kan vise det næste resultat skal vi vise

Sætning 3.5. Hvis ψ er en "band-limited" ortonormal wavelet med $|\hat{\psi}|$ kontinuert i 0, så er $\hat{\psi} = 0$ næsten overalt i en åben omegn af origo, dvs. der findes et $\mathcal{E} > 0$ så $\hat{\psi}(t) = 0$ for $t \in (-\mathcal{E}, \mathcal{E})$.

Beweis: Vi bruger sætning 3.3 punkt 1 med $f = \psi$ da $\psi = \psi_{0,0} \perp W_j$ for $j \neq 0$, så

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\psi}(t + 2^{j+1}k\pi) \overline{\hat{\psi}(2^{-j}t + 2k\pi)} = 0 \quad \text{for n.a. } t \in \mathbb{R} \quad (3.7)$$

Vi observerer at $t + 2^{j+1}k\pi$ ikke ligger støtten af $\hat{\psi}$ for $t \in \text{supp}(\hat{\psi})$, $k \neq 0$ og $j \geq J$ og ekvivalent $t - 2^{j+1}k\pi$ ikke ligger i støtten. Der gælder nemlig

$$\begin{aligned} |t - 2^{j+1}k\pi| &\geq ||t| - |2^{j+1}k\pi|| \\ &\geq |2^J\pi - |2^{J+1}k\pi|| = |2^J\pi(2|k| - 1)| \geq 2^J\pi \end{aligned}$$

Ligning (3.7) kan så reduceres til

$$\hat{\psi}(t)\hat{\psi}(2^{-j}t) = 0 \quad \text{for n.a. } t \in \text{supp}(\hat{\psi}), j \geq J \quad (3.8)$$

Vi bemærker at ligningen er trivelt opfyldt når $t \notin \text{supp}(\hat{\psi})$, så ligningen ovenfor gælder faktisk for n.a. $t \in \mathbb{R}$. Ved at lave et variabelskift $t = 2^js$ ser vi at dette også gælder for $-j \geq J$. Altså er $\hat{\psi}(2^{-j}t) = 0$ for n.a. $t \in \mathbb{R}$ og $|j| \geq J$. Vi kan derfor begrænse indeks-mængden i sætning 3.4 til $|j| < J$ for $t \in \text{supp}(\psi)$:

$$\sum_{|j| < J} |\hat{\psi}(2^jt)|^2 = 1 \quad \text{for n.a. } t \in \mathbb{R}$$

Da der er højst $2J-1$ led forskellig fra 0 følger det af skuffeprincipet at der må findes et j_0 i $\{j \in \mathbb{Z} \mid |j| < J\}$ så $|\hat{\psi}(2^{j_0}t)|^2 \geq \frac{1}{2J-1}$.

Vi vil nu vise at $\hat{\psi}(0) = 0$, for så følger der af kontinuiteten af $|\hat{\psi}|$ at der findes et $\mathcal{E} > 0$ så

$$|\hat{\psi}(\mu)| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2J-1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad |\mu| < \mathcal{E}$$

men så må for næsten alle $t \in \text{supp}(\hat{\psi})$ gælde $\mathcal{E} \leq |2^{j_0}t| \leq 2^J|t|$ da ellers summen $\sum_{|j| < J} |\hat{\psi}(2^jt)|^2 < 1$ for en ikke-anlængde. Derned må der for n.a. $t \in (-2^{-J}\mathcal{E}, 2^{-J}\mathcal{E})$ gælde at $t \notin \text{supp}(\hat{\psi})$ og dermed $\hat{\psi}(t) = 0$.

At $\hat{\psi}(0) = 0$ følger af (3.8) ved at lade $j \rightarrow \infty$, så får vi $\hat{\psi}(t)\hat{\psi}(0) = 0 \Leftrightarrow |\hat{\psi}(t)\hat{\psi}(0)| = 0$ for næsten alle $t \in \mathbb{R}$. Da vi havde antaget at $|\hat{\psi}|$ er kontinuert og $\hat{\psi}$ ikke er mul-funktionen, findes der et $t \in \mathbb{R}$ så $\hat{\psi}(t) \neq 0$, men så må $\hat{\psi}(0) = 0$.

■

Vi vil nu vise næste del af beviset for sætning 3.1:

Sætning 3.6. Hvis ψ er en "band-limited" ortonormal wavelet med $|\hat{\psi}|$ kontinuert i 0, så er for ethvert ulige tal q og næsten alle $t \in \mathbb{R}$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \hat{\psi}(2^jt) \overline{\hat{\psi}(2^{-jt} + 2q\pi)} = 0 \quad (3.9)$$

Bevis: Vi bruger igen sætning 3.3 punkt 2 med et vilkårligt $f \in L^2(\mathbb{R})$ og isolerer $k = 0$:

$$(\hat{Q}_j f)(t) = |\hat{\psi}(2^{-j}t)|^2 \hat{f}(t) + \hat{\psi}(2^{-j}t) \sum_{k \neq 0} \hat{f}(t + 2^{j+1}k\pi) \overline{\hat{\psi}(2^{-j}t + 2k\pi)}$$

Fra sætning 3.5 har vi at støtten af $\hat{\psi}$ er indeholdt i $[-2^J\pi, 2^J\pi] \setminus (-2^{-J}\pi, 2^{-J}\pi)$ for et passende stort J . $\hat{\psi}(2^{-j}t) \sum_{k \neq 0} \hat{f}(t + 2^{j+1}k\pi) \overline{\hat{\psi}(2^j(t + 2k\pi))}$ er derfor kun forskellig fra 0 for et endeligt antal j og k . Da $t + 2k\pi$ kan skrives $t + 2^p q\pi$, hvor $p \geq j$ og q ulige, kan vi omskrive til

$$(\hat{Q}_j f)(t) = |\hat{\psi}(2^{-j}t)|^2 \hat{f}(t) + \sum_{p \geq j} \sum_{q \text{ ulige}} \hat{f}(t + 2^{p+1}q\pi) \overline{\hat{\psi}(2^{-j}t) \hat{\psi}(2^{-j}(t + 2^{p+1}k\pi))}$$

og ved at summe over alle j og bruge sætning 3.4 får vi

$$\begin{aligned} \hat{f}(t) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} (\hat{Q}_j f)(t) \\ &= \overbrace{\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^{-j}t)|^2 \hat{f}(t)}^1 + \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{p \geq j} \sum_{q \text{ ulige}} \hat{f}(t + 2^{p+1}q\pi) \overline{\hat{\psi}(2^{-j}t) \hat{\psi}(2^{-j}(t + 2^{p+1}q\pi))} \end{aligned}$$

Vi bytter nu om på indekseringen så $p \in \mathbb{Z}$ og $j \leq p$ og bruger at kun et endeligt antal led er forskellig fra 0 og vi dermed kan bytte om på summenne:

$$\hat{f}(t) = \hat{f}(t) + \sum_{q \text{ ulige}} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{f}(t + 2^{p+1}q\pi) \sum_{j \leq p} \overline{\hat{\psi}(2^{-j}t) \hat{\psi}(2^{-j}(t + 2^{p+1}q\pi))} \quad (3.10)$$

Vi indfører hjælpefunktionen

$$h_k(t) := \sum_{j=0}^{\infty} \overline{\hat{\psi}(2^{-j}t) \hat{\psi}(2^{-j}(t + 2k\pi))}$$

Vi sætter $l = p - j$ og får dermed

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{q \text{ ulige}} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{f}(t + 2^{p+1}q\pi) \sum_{l \geq 0} \overline{\hat{\psi}(2^l(2^{-p}t) \hat{\psi}(2^l(2^{-p}t + 2q\pi)))} \\ &= \sum_{q \text{ ulige}} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{f}(t + 2^{p+1}q\pi) h_q(2^{-p}t) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Vi observerer nu at vi for ethvert $t_0 \in (-b, a) \cup (a, b)$ (hvor (a, b) indeholder støtten af \hat{f}) kan finde et $\delta > 0$ så

$$U = (t_0 + 2q_0\pi - \delta, t_0 + 2q_0\pi + \delta)$$

kun indeholder $t_0 + 2q_0\pi$ som punkt der har formen $t + 2^{p+1}q\pi$, da der kun er endelig mange og de er isolerede. Vi vil nu vise at $h_k(t) = 0$ for næsten alle $t \in \mathbb{R}$. Det gør vi ved at vælge et arbitraert $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$, da (3.11) skal være opfyldt for alle $f \in L^2(\mathbb{R})$. Vi vælger $\hat{f} = \chi_U$ og får så for næsten alle $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap ((-b, -a) \cup (a, b))$

$$0 = \sum_{q \text{ ulige}} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{f}(t + 2^{p+1}q\pi) h_q(2^{-p}t) = h_{q_0}(t)$$

da $\hat{f}(t + 2^{j+1}q\pi) \neq 0$ hvis og kun hvis $p = 0$ og $q = q_0$, per definition af U .

Ved nu at udvide $(-b, -a) \cup (a, b)$ ved at lade $b \rightarrow \infty$ og $a \rightarrow 0$ far vi at $h_{q_0}(t) = 0$ for næsten alle $t \in \mathbb{R}$. ■

Et mere generelt resultat, hvor bl.a. "band-limited"-kravet er fjernet, er

Sætning 3.7. En funktion $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ med $\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$, er en ortonormal wavelet hvis og kun hvis (3.1) og (3.2) er opfyldt.

Vi vil ikke bevise dette resultat her. Beviset kan findes i kapitel 7 i [HW].

Et andet vigtigt resultat, der er relateret til (3.1) og (3.2) er

Sætning 3.8. Hvis $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, så er følgende udsagn ekvivalente:

ψ opfylder (3.1) og (3.2) (3.12)

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k} \text{ med konvergens i } L^2(\mathbb{R}), \forall f \in L^2(\mathbb{R}) \quad (3.13)$$

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 = \|f\|^2 \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}) \quad (3.14)$$

Beviset kan ligeledes findes i kapitel 7 i [HW].

Sætningen er særlig interessant da den giver os et redskab til at teste nye funktioner fra $L^2(\mathbb{R})$ på deres evne til at repræsentere funktioner i $L^2(\mathbb{R})$. Hvis denne funktion opfylder (3.12) og vi kan normalisere funktionen giver sætning 3.7 os at vi har fundet en ortonormal wavelet.

4 Konvergencs

Vi vil nu se nærmere på konvergensen af rekkeudviklingen

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}(x) \quad (4.1)$$

for en funktion $f \in L^p(\mathbb{R})$. Vi vil kalde denne rekkeudvikling for **Wavelet-udviklingen**.

Funktionen ψ er en ortonormal wavelet der er frembragt af en funktion φ , som er skalingsfunktionen for en MRA. Det kunne f.eks. være ved brug af sætning 2.5.

Ovenstående udvikling kan også skrives som

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} Q_j f$$

Q_j havde vi defineret i definition 2.4. Da $V_{j+1} = V_j \oplus W_j \Leftrightarrow W_j = V_{j+1} \ominus V_j$ kan Q_j også skrives som $Q_j = P_{j+1} - P_j$. Det kan vi så bruge til at skrive wavelet-udviklingen som

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=-N}^N P_{j+1} f - P_j f = \lim_{N \rightarrow \infty} P_N f - P_{-N} f = \lim_{N \rightarrow \infty} P_N f$$

ved at bruge at $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ er en voksende følge og kun har nulfunktionen tilfælles, så $\lim_{N \rightarrow \infty} P_{-N} f = 0$ for enhver funktion $f \in L^p(\mathbb{R})$. Vi vil i dette afsnit vise at $\lim_{N \rightarrow \infty} P_N f$ konvergerer mod f i $L^p(\mathbb{R})$ -norm for $1 \leq p \leq \infty$ og punktvis.

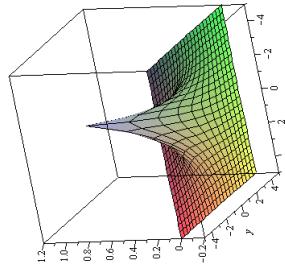
Vi introducerer en klasse af funktioner (betegnet med W) som på engelsk hedder "radial decreasing L^1 -majorants" for en funktion g når $|g(x)| \leq W(|x|)$ og W opfylder

$$W \in L^1([0, \infty)) \quad (4.2)$$

$$W \text{ er aftagende} \quad (4.3)$$

$$W(0) < \infty \quad (4.4)$$

Funktionen er overall begrænset af de sidste to egenskaber. Ordet "radial" antyder at denne klasse af majoranter er en restriktion til $[0, \infty)$ af funktioner W_n defineret på \mathbb{R}^n . Det kunne f.eks. være \mathbb{R}^2 med polære koordinater (θ, r) . Så er W_2 en funktion af θ og r og aftager med voksende r . Figuren herunder illustrerer principippet med $W_2(\theta, r) = e^{-r}$.



Vi skal endnu definere Lebesgue-mængden for en funktion f :

Definition 4.1. Lad f være en malelig funktion der er lokal integrabel⁴, så er **Lebesgue-mængden for f** , mængden bestående af **Lebesgue-punkter** x_0 for hvilke der gælder

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\delta} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |f(x) - f(x_0)| dx = 0 \quad (4.5)$$

Vi vil gerne vise at $P_i f(x)$ konvergerer punktvis mod $f(x)$ for næsten alle $x \in \mathbb{R}$. Det følger som korollar af følgende mere generelle sætning.

Sætning 4.2. Lad $\{T_j \mid j \in \mathbb{Z}\}$ være en familie af operatorer defineret ved

$$T_j f(x) = \int_{\mathbb{R}} 2^j K(2^j x, 2^j y) (f(y) - f(x)) dy \quad (4.6)$$

hvor $|K(x, y)| \leq C W\left(\frac{|x-y|}{2}\right)$, W er en "radial decreasing L^1 -majorant" og C kun afhænger af W . Vi har så for $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} T_j f(x) = 0 \quad (4.7)$$

for alle x i Lebesgue-mængden af f .

⁴En definition kan findes i [EH], definition 7.12

Som det kan ses af sætningen er den ikke begrænset til funktioner i $L^2(\mathbb{R})$ men mere generelt for funktioner i L^p for $1 \leq p \leq \infty$. Vi skal derfor starte med at se på konvergensen af wavelet-udviklingen for funktioner $f \in L^p(\mathbb{R})$

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k} \quad (4.8)$$

Vi starter med at vise følgende lemma for "radial decreasing L^1 -majoranter":

Lemma 4.3. *For "radial decreasing L^1 -majoranter" gælder*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} W(|x - k|)W(|y - k|) \leq CW\left(\frac{|x - y|}{2}\right) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (4.9)$$

Bewis: For at vise uligheden bruger vi trekantsuligheden for at bemærke at

$$\begin{aligned} |x - y| &\leq |x - k| + |y - k| \\ &\text{og dermed må enten } |x - k| \geq \frac{1}{2}|x - y| \text{ eller } |y - k| \geq \frac{1}{2}|x - y|. \text{ Alt da } W \text{ er aftagende,} \\ &W(|x - k|) \geq W(\frac{1}{2}|x - y|) \text{ eller } W(|y - k|) \geq W(\frac{1}{2}|x - y|) \text{ og dermed} \\ \sum_{k \in \mathbb{Z}} W(|x - k|)W(|y - k|) &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} W(|x - k|)W(\frac{1}{2}|x - y|) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} W(\frac{1}{2}|x - y|)W(|y - k|) \\ &= W(\frac{1}{2}|x - y|) \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} W(|x - k|) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} W(|y - k|) \right) \\ &\leq W(\frac{1}{2}|x - y|) \underbrace{\left(2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} W(|k|) \right)}_C \\ &= CW\left(\frac{1}{2}|x - y|\right) \end{aligned}$$

hvor C kun afhænger af W og summen som definerer C konvergerer, da $W \in L^1([0, \infty))$. \blacksquare

Vi omskriver operatoren P_j :

$$\begin{aligned} (P_j f)(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} f(y) \overline{2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j y + k)} dy \cdot 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j x + k) \end{aligned}$$

Vi antager at φ og ψ har "radial decreasing L^1 -majoranter" og dermed sikrer lemma 4.3 os konvergensen af summerne og godt gører dermed for at vi kan bytte om på summation og integration, så vi får

$$\begin{aligned} (P_j f)(x) &= 2^j \int_{\mathbb{R}} f(y) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(2^j x + k) \varphi(2^j y + k) dy \\ &= 2^j \int_{\mathbb{R}} f(y) K_{\varphi}(2^j x, 2^j y) dy \end{aligned}$$

⁵Jf. [TL], sætning 12.2.3 "Integraltesten". Brug at W er symmetrisk og begrænset i 0

hvor $K_\varphi(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(x+k) \overline{\varphi(y+k)}$.
 På samme måde kan vi omskrive Q_j :

$$(Q_j f)(x) = 2^j \int_{\mathbb{R}} f(y) K_\varphi(2^j x, 2^j y) dy$$

med $K_\varphi(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi(x+k) \overline{\psi(y+k)}$.

Vi har brug for et lemma mere for at kunne bevise den første konvergens-sætning for L^p -rum med $1 \leq p \leq \infty$. Vi havde i afsnit 2 formulert sætning 4.5, som medfører at $|\hat{\varphi}(0)| = 1$ for en skaleringsfunktion φ . Vi vil i resten af afsnittet antage at $\hat{\varphi}(0) = 1$, svarende til at vi ganger en konstant $e^{i\theta}$ på φ , med et passende θ . Den antagelse sikrer at følgende gælder:

Lemma 4.4. *Antag at skaleringsfunktionen φ har en "radial decreasing L^1 -majorant" og opfylder $\hat{\varphi}(0) = 1$. Så gælder for næsten alle $x \in \mathbb{R}$ og $j \in \mathbb{Z}$*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(x+k) = 1 \quad (4.10)$$

$$\int_{\mathbb{R}} 2^j K_\varphi(2^j x, 2^j y) dy = 1 \quad (4.11)$$

I beviset for lemmaet vil vi bruge følgende sætning uden bevis:

Sætning 4.5. *Lad $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ være en følge af afsluttede underrum af $L^2(\mathbb{R})$ som opfylder (2.1), (2.2) og (2.5) fra definition 2.1 og hvor $|\varphi|$ er kontinuert i 0. Så er følgende toudsagn ækvivalente*

1. $\hat{\varphi}(0) \neq 0$

2. (2.4) er opfyldt

Når et af udsagnene er opfyldt er $|\hat{\varphi}(0)| = 1$.

Bevis for lemma 4.4: Lad

$$A(x) = \sum_{k \in \mathbb{R}} \varphi(x+k)$$

$A(x)$ er 1-periodisk. For at vise at $\sum_{k \in \mathbb{R}} \varphi(x+k) = 1$ for n.a. $x \in \mathbb{R}$ vil vi vise at Fourier-koefficienterne kun er forskellig fra 0 for præcis ét indeks-element. Vi beregner Fourier-koefficienterne for $A(x)$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 A(x) e^{-2\pi i xl} dx &= \int_0^1 \sum_{k \in \mathbb{R}} \varphi(x+k) e^{-2\pi i xl} dx \\ &= \sum_{k \in \mathbb{R}} \int_0^1 \varphi(x+k) e^{-2\pi i xl} dx \\ &= \sum_{k \in \mathbb{R}} \int_k^{k+1} \varphi(x) e^{-2\pi i xl} dx \\ &= \hat{\varphi}(2\pi l) \end{aligned}$$

Ombrytningen er tilladt, da φ har en L^1 -majorant og dermed er $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(x+k) < \infty$.
 Vi vil nu inddrage et resultat fra [HW] kapitel 2:

Sætning 4.6. Hvis φ er en skalingsfunktion for en MRA og $|\varphi|$ er kontinuert, så er

$$\hat{\varphi}(2k\pi) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

[..]

Af sætningen følger nu det ønskede resultat idet $\hat{\varphi} = 0$ for $l \neq 0$ og for $l = 0$ har vi fra sætning 4.5 punkt 1 at $\hat{\varphi}(0) \neq 0$ da φ er en skalingsfunktion for en MRA, så der gælder $|\hat{\varphi}(0)| = 1$. Specielt havde vi antaget at $\hat{\varphi}(0) = 1$.

Fourierrekken for $A(x)$ har altså kun et led, nemlig konstantledet, som er lige med $\hat{\varphi}(0) = 1$.

Anden del følger ved at omskrive første del:

$$\begin{aligned} 1 &= \overline{\hat{\varphi}(0)} = \int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi(v)} e^0 dv \\ &= \overbrace{\sum_{k \in \mathbb{R}} \varphi(2^j x - k)}^1 \int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi(v)} dv \\ &= \sum_{k \in \mathbb{R}} \varphi(2^j x - k) \int_{\mathbb{R}} 2^j \overline{\varphi(2^j y - k)} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} 2^j K_{\varphi}(2^j x, 2^j y) dy \end{aligned}$$

hvor vi har brugt at integrationen over \mathbb{R} er translations-invariant ($\int f(x) dx = \int f(x+k) dx$) og vi har substitueret $v = 2^j y$. Summation og integration kunne byttes om, da summen konvergerer, som vi havde vist i første del. ■

Vi vil i resten af dette afsnit antage at $\hat{\varphi}(0) = 1$ uden at nævne det eksplisit.

Nu skal vi vise vores første hovedresultat

Sætning 4.7. For operatorerne T_j defineret i (4.6) gælder:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|T_j f\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0 \quad f \in L^p(\mathbb{R}), 1 \leq p < \infty \quad (4.12)$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|T_j f\|_{\infty} = 0 \quad f \text{ begrænset, uniform kontinuert} \quad (4.13)$$

Bevis: Vi husker på at operatoren T_j er defineret som

$$T_j f(x) = \int_{\mathbb{R}} 2^j K(2^j x, 2^j y) (f(y) - f(x)) dy$$

og vi husker på at $|K(x, y)| \leq CW\left(\frac{|x-y|}{2}\right)$ for en passende "radial decreasing L^1 -majortant" W . Vi har så for en funktion $f \in L^p(\mathbb{R})$

$$|T_j f| \leq \int_{\mathbb{R}} 2^j W(2^{j-1}|x-y|) |f(y) - f(x)| dy \quad (4.14)$$

$$= C \int_{\mathbb{R}} 2^j W(2^{j-1}|t|) |f(x-t) - f(x)| dt \quad (4.15)$$

Ved at bruge

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

har vi

$$\begin{aligned} \|T_j f\|_{L^p(\mathbb{R})} &= \left(\int_{\mathbb{R}} |T_j f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(C^p \int_{\mathbb{R}} 2^{jp} W(2^{j-1}|t|)^p \int_{\mathbb{R}} |f(x-t) - f(x)|^p dx dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= C \int_{\mathbb{R}} 2^{jp} W(2^{j-1}|t|) \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-t) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dt \end{aligned} \quad (4.16)$$

hvor vi har brugt et korollar af Tonelli's sætning for at bytte om på integrationsrækkefølgen (alle involverede funktioner er \mathcal{M}^+ -funktioner).

Ved at substiutere $s = 2^j t$ får vi

$$\begin{aligned} C \int_{\mathbb{R}} 2^{jp} W(2^{j-1}|t|) \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-t) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dt \\ = C \int_{\mathbb{R}} W(2^{-1}|s|) \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-2^{-j}s) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} ds \end{aligned} \quad (4.17)$$

Ved nu at anvende Lebesgues majorant sætning med $CW(2^{-1}|s|)2\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$ som majorant, følger det at $\lim_{j \rightarrow \infty} \|T_j f\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0$.

For (4.13) har vi per definition af uniform kontinuitet at

$$w_\infty(t) := \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x-t) - f(x)| \rightarrow 0 \quad \text{for } t \rightarrow 0$$

Ved at indsætte $w_\infty(t)$ i stedet for $\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-t) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$ i (4.16) og gennemfører samme substitution som i (4.17) får vi også at $\lim_{j \rightarrow \infty} \|T_j f\|_\infty = 0$. ■

Af sætningen følger som korollar:

Korollar 4.8. *Antag at φ har en "radial decreasing L^1 -majorant" og er en skalerings-funktion for en MRA. Så er*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|P_j f - f\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0 \quad f \in L^p(\mathbb{R}), 1 \leq p < \infty \quad (4.18)$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|P_j f - f\|_\infty = 0 \quad f \text{ begrenset, uniform kontinuert} \quad (4.19)$$

Bevis: Da vi har

$$(P_j f)(x) = \int_{\mathbb{R}} 2^{jy} K_\varphi(2^j x, 2^j y) f(y) dy$$

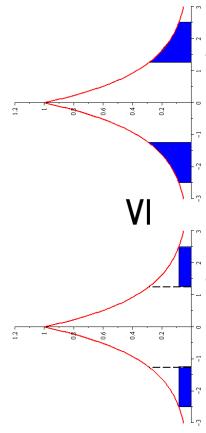
er $(T_j f)(x) = (P_j f)(x) - f(x)$ og dermed følger korollaret direkte af sætning 4.7. ■

Vi vil nu vende tilbage til den punktvise konvergens af operatoren T_j og bevise sætning 4.2:

Bevis for sætning 4.2: Vi tager igen (som i beviset for sætning 4.7) udgangspunkt i uligheden

$$|T_j f| \leq C \int_{\mathbb{R}} 2^{j-1} |t| |f(x-t) - f(x)| dt$$

Vi skal bruge at $rW(r) \leq \int_{\frac{r}{2} \leq |x| \leq r} W(|x|) dx \rightarrow 0$ for $r \rightarrow \infty$ (se illustration nedenfor)



Per definition af f 's Lebesgue-mængden L_f findes der for ethvert $x \in L_f$ et $\delta > 0$ så

$$\frac{1}{r} \int_{|t| \leq r} |f(x-t) - f(x)| dt \leq \delta \quad 0 < r \leq \eta \quad (4.20)$$

for et passende lille η .

Vi deler beviset op i to dele:

$$\frac{1}{C} |T_j f(x)| \leq \underbrace{\int_{|\eta| < r} 2^{j-1} |t| |f(x-t) - f(x)| dt}_{I_1} + \underbrace{\int_{|\eta| \geq r} 2^{j-1} |t| |f(x-t) - f(x)| dt}_{I_2} + \int_{|t| \geq r} 2^{j-1} |t| |f(x-t) - f(x)| dt$$

Vi vil først finde et estimat der går mod 0 for $j \rightarrow \infty$ for første integral. Dertil integrerer vi I_1 partielt:

$$\begin{aligned} I_1 &= 2 \int_0^\eta 2^{j-1} |t| |f(x-t) - f(x)| dt \\ &= \left[2^{j+1} \left(\int_0^r |f(x-s) - f(x)| ds \right) W(2^{j-1} r) \right]_{r=0}^\eta \\ &\quad - 2 \int_0^\eta \left(\int_0^r |f(x-s) - f(x)| ds \right) 2^{j-1} W'(2^{j-1} r) dr \\ &\leq [2^{j+1} r \delta W(2^{j-1} r)]_{r=0}^\eta - 2 \int_0^{2^{j-1} r} \left(\int_0^{2^{j-1} r} |f(x-s) - f(x)| ds \right) 2^{j-1} W'(2^{-1} r) dr \\ &\leq C\delta - 2 \int_0^{2^{j-1} r} 2^{-j} r \delta 2^{j-1} W'(\frac{1}{2} r) dr \end{aligned}$$

hvor vi har brugt estimatet $\int_0^r |f(x-s) - f(x)| ds \leq r\delta$ for $0 < r \leq \eta$ og at $W'(\frac{1}{2} r) \leq 0$ (ikke-postiviteten af W' er en konsekvens af at W er aftagende).

For at estimere $-2 \int_0^{2^{j-1} r} 2^{-j} r \delta 2^{j-1} W'(\frac{1}{2} r) dr$ yderligere, integrerer vi igen partielt:

$$\begin{aligned} -2 \int_0^{2^{j-1} r} \frac{1}{2} r W'(\frac{1}{2} r) dr &= -2^{j+1} \eta W(2^{j-1} \eta) + 2 \int_0^{2^{j-1} \eta} W(\frac{1}{2} r) dr \\ &= -2^{j+1} \eta W(2^{j-1} \eta) + 4 \int_0^{2^{j-1} \eta} W(s) ds \end{aligned}$$

Når vi nu lader $j \rightarrow \infty$ går første led mod 0, da $W(r) \rightarrow 0$ for $r \rightarrow \infty$, og andet led går mod $4\|W\|_{L^1([0,\infty))}$. Vi har så det af j uafhængige estimat

$$I_1 \leq C\delta + 4\|W\|_{L^1([0,\infty))}$$

For at vurdere I_2 , bruger vi trekantsuligheden og Hölders uligheden med de duale eksponenter⁶ $p, q > 1$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{|t| \geq \eta} 2^j W(2^{j-1}|t|) |f(x-t) - f(x)| dt \\ &\leq \int_{|t| \geq \eta} 2^j W(2^{j-1}|t|) |f(x-t)| dt + \int_{|t| \geq \eta} 2^j W(2^{j-1}|t|) |f(x)| dt \\ &\leq \underbrace{\left(\int_{|t| \geq \eta} |2^j W(2^{j-1}|t|)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}}_{I_{21}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} + |f(x)| \underbrace{\int_{|t| \geq \eta} |2^j W(2^{j-1}|t|)| dt}_{I_{22}} \end{aligned}$$

Vi har at

$$I_{22} = 2 \int_{|s| \geq 2^{j-1}\eta} W(|s|) ds$$

og dermed for $j \rightarrow \infty$ $I_{22} \rightarrow 0$

For integralet I_{21} har vi, ved at bruge $|f|^{\frac{q}{p}} |f| = |f|^q$, følgende estimat

$$\begin{aligned} I_{21} &= \left(\int_{|t| \geq \eta} |2^j W(2^{j-1}|t|)|^{\frac{q}{p}} |2^j W(2^{j-1}|t|)| dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\int_{|t| \geq \eta} \left(\sup_{|t| \geq \eta} |2^j W(2^{j-1}|t|)| \right)^{\frac{q}{p}} |2^j W(2^{j-1}|t|)| dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\sup_{|t| \geq \eta} 2^j W(2^{j-1}|t|) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{|t| \geq \eta} 2^j W(2^{j-1}|t|) dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= C (\|W\|_{L^1([0,\infty))})^{\frac{1}{q}} \left(\sup_{|t| \geq \eta} 2^j W(2^{j-1}|t|) \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Da vi med $rW(r) \rightarrow 0$ for $r \rightarrow \infty$ og at W er aftagende har at

$$\sup_{|t| \geq \eta} 2^j W(2^{j-1}|t|) = 2^j W(2^{j-1}\eta) \rightarrow 0 \quad j \rightarrow \infty$$

hvor ” W aftagende” blev brugt idet $W(\eta)$ så er den største værdi i mængden $\{W(|t|) \mid |t| \geq \eta\}$. Vi kan derfor konkludere at I_2 går mod 0 for $j \rightarrow \infty$ og samlet har vi det ønskede resultat

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |T_j f(x)| = 0 \quad \forall x \in L_f$$

hvor L_f betegner f ’s Lebesgue-mængde.

⁶Definition: Duale eksponenter kaldes et tal-par p, q så $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Vi har igen, som for konvergensen i $L^p(\mathbb{R})$ følgende korollar for P_j :

Korollar 4.9. *Lad φ være en skaleringsfunktion for en MRA og have en "radial decreasing L^1 -majortant". Hvis $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, så er*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} P_j f(x) = f(x) \quad \text{for alle } x \text{ i } f\text{'s Lebesgue-mængde} \quad (4.21)$$

dvs. for n.a. $x \in \mathbb{R}$.

5 DWT - Diskret Wavelet Transformation

Vi har nu fundet en metode til at bestemme en funktion ψ , ud fra en skaleringsfunktion, knyttet til en MRA (sætning 2.5). Og vi har fundet to ligninger der karakteriserer alle de funktioner der enten er orthonormale, fuldstændige systemer (sætning 3.1 og 3.7) eller i det mindste kan række-udvikle (wavelet-udvikle) en funktion og bevare funktionens L^2 -norm (sætning 3.8).

Med denne teoretiske baggrund vil vi nu rette blikket mod vores udgangspunkt, at bruge wavelet-udviklingen for at reducere og analysere data.

Vi skal derfor udlede en algoritme der kan "dekomponere" og genskabe et diskret signal ved at bruge filter-koefficienterne a_k , som er relateret til en MRA-skaleringsfunktion φ og dens lavpassfilter m_0 .

De signaler der kodes i billeder, lydfiler og andre måledata stammer for det meste fra en kilde der leverer et kontinuert signal. Analogt radiosignal transmitteres bl.a. ved at modulere frekvensen, dvs. frekvensen, dvs. frekvensen for en radiostation er ikke konstant. Når vi i København indstiller radioen på DR P3 sætter vi den på frekvensen 93,9 MHz FM⁷. "FM" står for "frekvens-moduleret"⁸ (en: "frequency-modulated"). Frekvensen bevæger sig trods alt i et afgrænsset spektrum⁹. Hvor ofte et signal skal males for entydigt at kunne genskabes fortæller følgende sætning, der hedder **Shannon Sampling Theorem**, opkaldt efter Claude Shannon (1916-2001) :

Sætning 5.1. *Lad $f \in L^2(\mathbb{R})$ og lad \hat{f} have støtte i $(-B\pi, B\pi)$. Så kan f skrives som*

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{B}\right) \frac{\sin(\pi(Bx - k))}{\pi(Bx - k)} \quad (5.1)$$

og summen konvergerer i $L^2(\mathbb{R})$ -norm

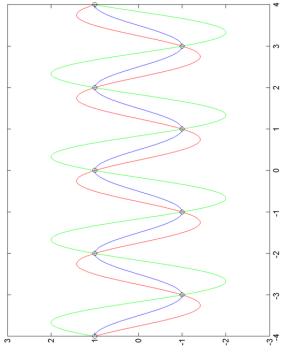
Bemærkning 1: Vi forudsætter her at \hat{f} har støtte i det åbne interval $(-B\pi, B\pi)$.

Andre steder, bl.a. i [HW] er sætningen defineret med et lukket interval $[-B\pi, B\pi]$. Der er dog et problem når \hat{f} antager værdierne forskellig fra 0 i $-B\pi$ eller $B\pi$, som der kan ses på følgende figur, hvor f er rene sinus-svingninger med frekvensen $B\pi$, men med forskellig amplitude og fase.

⁷<http://www.dr.dk/CmDR/Modtagelse/Radio/>

⁸I kontrast til "AM" (en: "amplitude-modulated")

⁹Variationen i frekvensen plejer at ligge på ca. 1 kHz



Figur 2: Original beskrivelse: "This shows three different sinusoids all at precisely the Nyquist frequency (or critical frequency) and how the samples do not provide enough information to differentiate between them."

Kilde: <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:CriticalFrequencyAliasing.png>

Bevis: Vi finder først Fourier-rækken for \hat{f} på intervallet $(-B\pi, B\pi)$:

$$\hat{f}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{-k} e^{-ikB^{-1}t}$$

hvor c_{-k} er Fourier-koefficienter for \hat{f} :

$$c_{-k} = \frac{1}{2\pi B} \int_{-B\pi}^{B\pi} \hat{f}(t) e^{ikB^{-1}t} dt$$

Vi vil nu udtrykke \hat{f} ved f , ved at bruge formlen for den inverse Fourier-transformation

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{ixt} dt$$

og dennefar vi for \hat{f} 's Fourier-koefficienter

$$c_{-k} = \frac{1}{2\pi B} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{ikB^{-1}t} dt \right) = \frac{1}{2\pi B} f(kB^{-1})$$

Ved nu at bruge Fourier-rækken for \hat{f} i den inverse Fourier-transformation, far vi

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{ixt} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{-k} e^{-ikB^{-1}kt} \right) e^{ixt} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi B} f(kB^{-1}) e^{-iB^{-1}kt + ixt} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\frac{k}{B}) e^{it(x - B^{-1}k)} dt \end{aligned}$$

Stamfunktionen for $e^{it(x - B^{-1}k)}$ er

$$\int_0^s e^{it(x - B^{-1}k)} dt = \left[\frac{1}{i(x - B^{-1}k)} e^{it(x - B^{-1}k)} \right]_0^s = \frac{1}{i(x - B^{-1}k)} e^{is(x - B^{-1}k)} - \frac{1}{i(x - B^{-1}k)}$$

og ved at huske på at $\text{supp}(\hat{f}) \subset (-B\pi, B\pi)$ kan vi nojes med at integrere på dette interval. Derned kommer vi frem til den ønskede formel for f .

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{f(\frac{k}{B})}{2\pi B} \int_{-B\pi}^{B\pi} e^{it(x-B^{-1}k)} dt \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{f(\frac{k}{B})}{2\pi B} \frac{1}{(x - B^{-1}k)} \left(\frac{e^{iB\pi(x-B^{-1}k)} - e^{-iB\pi(x-B^{-1}k)}}{i} \right) \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\frac{k}{B}) \frac{2 \sin(\pi(Bx - k))}{\pi(Bx - k)}
\end{aligned}$$

■

Bemærk at vi, når vi betragter et udsnit af en funktion, f.eks. når vi analyserer et lydsignal stykvis, indtøjer en diskontinuitet og dermed har den Fourier-transformerede af signalet ikke længere støtte på et begrænset interval. Det gør anvendelsen af sætningen meget vanskeligt i praksis, men fejlen, der laves ved at anvende et bånd-filter, der, teoretisk, fjerner alle frekvenser over og under en fastlagt værdi, er ofte lille nok til at kunne se bort fra problemet ved at bruge $(-2B\pi, 2B\pi)$ eller et større interval som støtte for $\text{supp}(\hat{f})$.

En anden udgave af sætningen, mest brugt i de anvendte fag, hvor der ikke findes negative frekvenser, kræver at signalet aftastes med det dobbelte af den højeste frekvens.

For et radio-signal, med en frekvens på 1 kHz skulle man altså tage mere end $2B = 2.000$ målinger pr. sekund for at kunne gense kable signalen fuldstændigt. På samme måde kan vi også bestemme hvilke frekvenser en lydfil kan repræsentere. Et almindeligt lydsignal har en "sampling rate" på 44.100 Hz, svarende til at kunne indeholde lydsignaler på op til en frekvens på 22.050 Hz, som ligger lidt over den frekvens som mennesket kan høre.

5.1 Algoritmer

For at bruge wavelet-teorien i praksis skal vi give en algoritme for at transformere et signal. Hvis signalet er kontinuert bruger vi sætning 5.1 "Shannon Sampling Theorem" for at få et diskret signal. Vi skal nu finde en måde at fortolke de diskrete værdier i en MRA-sammenhæng, dvs. hvordan kan vi forene den teori vi har udviklet for funktioner på \mathbb{R} med diskrete signaler?

Vi husker på at wavelet-udviklingen for en funktion f er

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}$$

Hvis f nu aftastes B gange per sekund, hvor B er et naturligt tal større end den frekvens der kræves af sætning 5.1, kan vi tolke målepunkterne som koeficienterne $\langle f, \varphi_{B,k} \rangle$ og antage at f ligger i V_B , hvor V_B hører til en MRA med skaleringsfunktion φ . Vi betragter så

$$f = P_B f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{B,k} \rangle \varphi_{B,k}$$

For signaler af endelig længde, indekseret fra 0 til N , som er tilfældet i praksis er der ingen konvergentsproblemer, idet vi sætter $\langle f, \varphi_{B,k} \rangle = 0$ for $k \neq 0, \dots, N$. Men vi har allerede mødt et eksempel på en wavelet-udvikling der er konvergent for et uendeligt signal, nemlig i sætning 5.1, med $\varphi_{j,k} = \text{sinc}(\pi(jx - k))$, hvor vi kræver at følgen $\{f(B^{-1}k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ligger i ℓ^2 , rummet af kvadratisk summable følger og hvor $\text{sinc}(x)$ er funktionen

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{for } x \neq 0 \\ 1 & \text{for } x = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

Vi betegner målepunkterne med

$$c_{j,k} = \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \quad (5.3)$$

Det indre produkt af f med waveletfunktionerne $\psi_{j,k}$ betegner vi

$$d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle \quad (5.4)$$

og brugen betegnelsen c_j og d_j for at betegne hhv. $\{c_{j,k} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ og $\{d_{j,k} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ og kræver at begge følger ligger i ℓ^2 .

Vi vil nu udlede algoritmen for at beregne $c_{j-1,k} = \langle f, \varphi_{j-1,k} \rangle$ og $d_{j-1,k} = \langle f, \psi_{j-1,k} \rangle$ ud fra elementerne $c_{j,k} = \langle f, \varphi_{j,k} \rangle$. Svarende til at skrive f som

$$\begin{aligned} f &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{B,k} \rangle \varphi_{B,k} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{B-1,k} \rangle \varphi_{B-1,k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{B-1,k} \rangle \psi_{B-1,k} \end{aligned}$$

som er muligt da $f \in V_B$, som er et Hilbertrum, og da V_{B-1} er et afsluttet underrum med ortogonalt komplement W_{B-1} , gælder for alle elementer i V_B at de kan skrives som sum af V_{B-1} og W_{B-1} (jf. [NY], sætning 4.24).

Vi husker på at $\frac{1}{2}\varphi(\frac{1}{2}x)$ er indeholdt i underrummet V_0 og derned kan udtrykkes i dette runs basis $\{\varphi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$:

$$\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{1}{2}x\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \varphi(x - k)$$

hvor a_k er det indre produkt $\langle \frac{1}{2}\varphi(\frac{1}{2}x), \varphi(x - k) \rangle$:

$$a_k = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{1}{2}x\right) \overline{\varphi(x - k)} dx$$

Den generelle form for rækkeudviklingen af $\varphi_{j-1,k}$ i basen $\{\varphi_{j,k} \mid j, k \in \mathbb{Z}\}$ er så

$$\begin{aligned} \varphi_{j-1,k}(x) &= 2^{\frac{j-1}{2}} \varphi(2^{j-1}x - k) = 2^{\frac{j-1}{2}} \frac{1}{2} \varphi\left(\frac{1}{2}(2^j x - 2k)\right) \\ &= 2^{\frac{j-1}{2}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l \varphi((2^j x - 2k) - l) = \sqrt{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l \varphi_{j,2k-l} \end{aligned}$$

Samme resultat gælder også for ψ da også $\psi_{j-1,k}$ er indeholdt i V_j :

$$\psi_{j-1,k}(x) = \sqrt{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} b_l \varphi_{j,2k-l}$$

hvor

$$b_l = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} \psi\left(\frac{1}{2}x\right) \overline{\varphi(x-l)} dx$$

Med disse resultater får vi

$$\begin{aligned} c_{j-1,k} &= \langle f, \varphi_{j-1,k} \rangle = \langle f, \sqrt{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l \varphi_{j,2k-l} \rangle \\ &= \sqrt{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \bar{a}_l \langle f, \varphi_{j,2k-l} \rangle = \sqrt{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \bar{a}_l c_{j,2k-l} \end{aligned}$$

Tilsvarende for $d_{j-1,k}$:

$$\begin{aligned} d_{j-1,k} &= \langle f, \psi_{j-1,k} \rangle = \langle f, \sqrt{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} b_l \varphi_{j,2k-l} \rangle \\ &= \sqrt{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \bar{b}_l \langle f, \varphi_{j,2k-l} \rangle = \sqrt{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \bar{b}_l c_{j,2k-l} \end{aligned}$$

Vi kan derned dekomponere signalet i V_j (f.eks. V_0) i en projektion på V_{j-1} og W_{j-1} . Proceduren kan så fortsættes for signalet i V_{j-1} .

Fra formulene for $c_{j-1,k}$ og $d_{j-1,k}$ bemærker vi at kun ca. halvt så mange koeficienter er forskellig fra 0 i forhold til $c_{j,k}$. Det gælder dog kun for filtre af endelig langde, dvs. a_l og b_l er kun forskellig fra 0 for endelig mange $l \in \mathbb{Z}$. Fra sætning 5.1 har vi så at frekvensbåndet for $c_{j-1,k}$ -koeficienterne er halvt så bredt som for c_j -koeficienterne.

Algoritmen kan også beskrives som en konvolution af trækerner $\{a_l\}_{l \in \mathbb{Z}}$ og $\{c_{j,l}\}_{l \in \mathbb{Z}}$ med en efterfølgende lavpas-filtrering ved at fjerne hvert andet element (de ulige-indeksede elementer).

Vi vender nu blikket mod en algoritme der genskaber signalet i V_j ud fra signalerne i V_{j-1} og W_{j-1} . Algoritmen er letlig:

Da $V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$ og V_{j-1} og W_{j-1} er afsluttede bruger vi igen at et element i V_j kan skrives som sum af et element i V_{j-1} og W_{j-1} . Udtrykt i projektionsoperatorne P_j og Q_j betyder det at $P_j f = P_{j-1} f + Q_{j-1} f$ og $P_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k}$. Vi har dermed

$$\begin{aligned} P_j f &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \varphi_{j,k} \\ &= P_{j-1} f + Q_{j-1} f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j-1,k} \varphi_{j-1,k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j-1,k} \psi_{j-1,k} \end{aligned}$$

Ved nu at erstatte $\varphi_{j-1,k}$ med rekkeudviklingen i $\varphi_{j,k}$, som vi havde fundet tidligere og tilsvarende for $\psi_{j-1,k}$ får vi

$$\begin{aligned} P_j f &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j-1,k} \left(\sqrt{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l \varphi_{j,2k-l} \right) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j-1,k} \left(\sqrt{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} b_l \varphi_{j,2k-l} \right) \\ P_j f &= \underbrace{\sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j-1,k} a_{2k-m} + d_{j-1,k} b_{2k-m} \right) \varphi_{j,m}}_{c_{j,m}} \end{aligned}$$

Vi sammenfatter resultaterne i en sætning:

Sætning 5.2. Lad $f \in V_j$, hvor V_j er et element i en MRA med skaleringsfunktion φ og tilhørende wavelet ψ .

Følgen $\{c_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ bestående af koeficienterne $c_{j,k} = \langle f, \varphi_{j,k} \rangle$ kan dekomponeres i to følger bestående af koeficienter $c_{j-1,k} = \langle f, \varphi_{j-1,k} \rangle$ og $d_{j-1,k} = \langle f, \psi_{j-1,k} \rangle$, tilhørende f 's projktion på hhv. V_{j-1} og W_{j-1} . Koeficienterne beregnes ved

$$c_{j-1,k} = \sqrt{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \bar{a}_l c_{j,2k-l} \quad d_{j-1,k} = \sqrt{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \bar{b}_l c_{j,2k-l} \quad (5.5)$$

hvor

$$a_l = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} \varphi\left(\frac{1}{2}x\right) \overline{\varphi(x-l)} dx \quad (5.6)$$

$$\text{og } b_l = (-1)^{n+1} \overline{a_{1-l}}.$$

Omvendt kan koeficienterne $c_{j,m}$ beregnes ved

$$c_{j,m} = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j-1,k} a_{2k-m} + d_{j-1,k} b_{2k-m} \quad (5.7)$$

Bevis: Vi havde allerede udledt formlerne for $c_{j-1,k}$, $d_{j-1,k}$ og $c_{j,m}$. Der er kun tilbage at vise $b_l = (-1)^{n+1} \overline{a_{1-l}}$.

Af ligningen

$$\frac{1}{2} \psi\left(\frac{1}{2}x\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \varphi(x+k)$$

folger ved at Fourier-transformere at

$$\hat{\psi}(2t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \hat{\varphi}(t) e^{ikt} = m_1(t) \hat{\varphi}(t)$$

hvor $m_1(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k e^{ikt}$ (analog til definitionen af $m_0(t)$). Fra sætning 2.5 får vi så med $\nu(t) = 1$ at

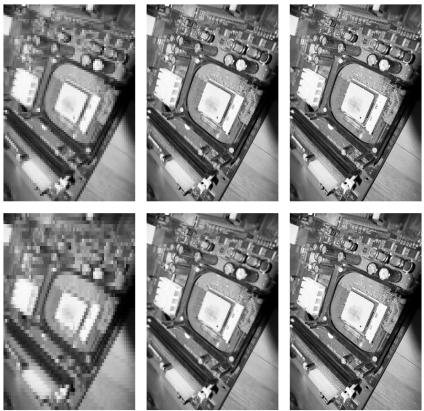
$$m_1(t) = e^{it} \overline{m_0(t+\pi)}$$

Derned får vi

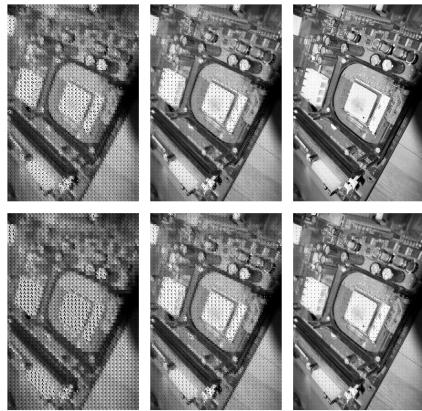
$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k e^{ikt} &= m_1(t) = e^{it} \overline{m_0(t+\pi)} \\ &= e^{it} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{a_k} e^{-ik(t+\pi)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{a_k} e^{it(1-k)} e^{-it\pi} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{a_{1-n}} e^{int} (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

hvor vi har brugt $n = 1 - k$. Vi kan dermed se at $b_k = (-1)^{k+1} \overline{a_{1-k}}$. ■

Vi vil nu give nogle eksempler på anvendelser af algoritmen og begrunde fordele af dekompositionen, selv om den ikke generelt har samme længde som udrangs-signalen og endda kan være længere end det originale signal.



Figur 3: Haar / D2-wavelet-dekomponerede billeder



Figur 4: D4-wavelet-dekomponerede billeder

På figur 3 og 4 kan ses en komplilation af billeder, bestående af et billede der er blevet opdelt i felter af størrelsen 16×16 billedpunkter og billedpunkterne i disse felter er blevet lineariseret og omsorteret og derefter dekomponeret ved at anvende ovenstående algoritme, ned hhv. Haar-wavelet / -skalingsfunktionerne (D2) og Daubechies-D4-wavelet / -skalingsfunktionerne.

Dekompositionen kan bl.a. bruges til at komprimere et signal, ved at sætte koeficienterne $d_{j,k}$ som er mindre end en fastlagt værdi med 0 og dataene kan dermed effektivt komprimeres med en entropi-kodning som f.eks. Huffman-kodningen.¹⁰. Kom-

¹⁰ Huffman-kodningen giver hyppige forekommende værdier en kortere kode end sjældent forekommende værdier, der tilsvarende far længere koder

pilationen viser billeder hvor signalerne fra det originale billede blev dekomponeret og forskelligt mange d_{jk} -koefficienter sat lige ned til 0. F.eks. blev der i billede 1 (øverst til venstre) i hvid. figur 3 og 4 sat 255 af de 256 værdier i dekompositionen lige ned til 0, og derefter blev rekonstruktions-algoritmen anvendt på dekompositionen. Nedenfor er en oversigt over hvor mange koefficienter der *ikke* blev sat til 0 i de viste billeder. Derved skal bemærkes at mit program genererer 9 billeder. Når billederne indekseres fra 0 til 8 har billede $i + \sum_{k=0}^{i-1} 2^k$ elementer i dekompositionen som *ikke* er sat til 0.

- **Oppe venstre:** 1
- **Oppe højre:** 2
- **Midten venstre:** 16
- **Midten højre:** 32
- **Nede venstre:** 64
- **Nede højre:** 256

Praktisk kan denne dekomposition og fjernelse af små værdier bruges til at vise et billede på nettet så smart en passende mængde af dataene er transmitteret. Så kan billedet vises meget hurtigere end ved en almindelig lineær transmission af dataene, hvor billedet ”scannes” oppefra og ned (de flest har nok oplevet dette på nettet). Som det kan ses på billederne ovenfor har billederne allerede formultzig kvalitet efter at en forholdsvis lille del af dataene er overført. En anvendelse af dette multiresolutions-princip kunne være digitale kort, f.eks. Google Maps, Google Earth, Krak eller lignende, hvor kun de ønskede billed-udsnit sendes til modtageren.

6 Eksempler

Vi vil nu se på nogle af de vigtigste eksempler på wavelets, der har meget forskellige egenskaber. Det skal dog bemærkes at wavelets kan antage mange andre udformninger, som vi ikke vil dække her. Blandt andet vil vi kun give eksempler på orthonormale wavelets og se bort fra biorthonormale wavelets, hvor wavelet-transformationen er invertibel, men wavelet-basen ikke er ortonormal. Disse wavelets spiller en meget vigtig rolle i anwendunger, f.eks. bruger JPEG2000-billedalgoritmen en biorthonormal CDF-wavelet opkaldt efter Cohen-Daubechies-Feauveau som er den første beskrevne familie af biorthonormale wavelets (se [CDF]).

6.1 Haar-wavelet

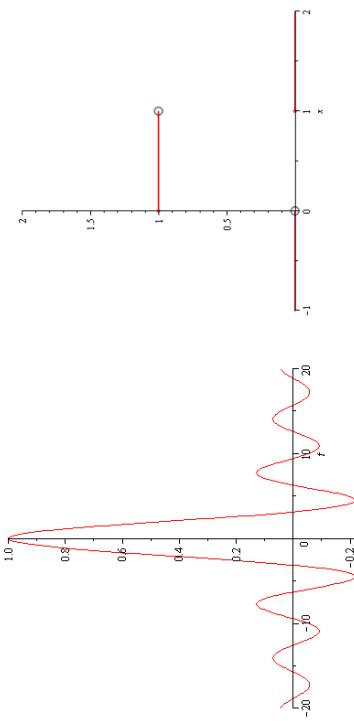
Vi starter med den historisk første wavelet der blev beskrevet i 1909 af Alfred Haar. Definitionen af skalering- og wavelet-funktionen varierer lidt afhængigt af hvilken bog man læser. Vi giver to eksempler på definitionen af skalering-funktionen for Haar-systemet:

$$\varphi(x) = \chi_{[0,1)}(x) \quad \text{eller} \quad \varphi(x) = \chi_{[-1,0]}(x)$$

Den Fourier-transformerede for den første skaleringsfunktion, som vi vil bruge som definition, er

$$\begin{aligned}
 \hat{\varphi}(t) &= \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,1]}(x) e^{-itx} dx = \int_0^1 e^{-itx} dx \\
 &= \left[\frac{1}{-it} e^{-itx} \right]_0^1 = \frac{1}{it} (1 - e^{-it}) \\
 &= \frac{e^{-it}}{it} \left(\frac{e^{it/2} - e^{-it/2}}{-2i} \right) \\
 &= e^{-it/2} \frac{\sin(t/2)}{\frac{t}{2}} \\
 &= e^{-it/2} \text{sinc}\left(\frac{t}{2}\right)
 \end{aligned}$$

Henunder kan ses graferne for skalerings-funktionen og realdelen af den Fourier-transformerede.



Figur 5: Haar-skaleringsfunktion: $\Re(\hat{\varphi})$ (venstre) og φ (højre)

Ved at brugesætning 2.5 kan vi beregne den Fourier-transformerede for Haar-waveleten og det viser sig at waveleten der fremkommer er

$$\psi_{Haar}(x) = \chi_{[-\frac{1}{2}, 0)}(x) - \chi_{[0, \frac{1}{2})}(x)$$

Den tilhørende MRA består af underrummene V_j der indeholder funktionerne der er konstante på intervalerne $\{2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)\} \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Enkelheden gør at Haar-systemet er velegnet for at illustrere principperne fra teorien, som vi også har gjort i dette projekt.

Anvendelsen i praksis er dog ret begrænset af enkelheden af wavelet-funktionen, både da den er stykvis konstant og da den er diskontinuert.

Haar-waveletten er et særligt fælde af en større klasse wavelet-funktioner, hvor den har betegnelsen D2:

6.2 Daubechies-wavelets

Daubechies-wavelets er en klasse af wavelets med kompakt støtte. Disse wavelets er blevet beskrevet i ”Ten lectures on wavelets” af en af de vigtigste personer for udviklingen af nye wavelets, Ingrid Daubechies.

Daubchies konstruktion af skaleringsfunktioner og wavelets bygger på filter-koefficienter h_k som er tilknyttet række-udviklingen af $\varphi_{j-1,k}$ i systemet $\{\varphi_{j,k} \mid k \in \mathbb{Z}\}$:

$$\varphi_{j-1,k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi_{j,k}$$

En kort introduktion til konstruktionen af Daubchies-wavelets kan findes i [NMT], eller i det originale værk af I. Daubechies "Ten lectures on wavelets", kapitel 6, hvor kaskad-algoritmen præsenteres, der bruges til at konstruere wavelet-funktionerne. Disse funktioner navngives D_{2N} , hvor N er et naturligt tal. Det specielle er nemlig at der ikke kan gives et eksplikt udtryk for filterkoefficienterne for $N > 3$, så der er brug for numeriske metoder for at beregne dem og derned wavelet-funktionerne.

I de billede vi tidligere viste har vi brugt D4-wavelets (eller rettere filter-koefficienterne, som her dog er sammenfaldende ved at vægne $\varphi(x) = \chi_{[0,1)}(x)$).

Fordelen ved wavelets med kompakt støtte er at man kun behøver at man i wavelet-udviklingen kun behøver at summere over et endeligt antal indeks, for hvilke waveletfunktionen er forskellig fra 0, hvis man f.eks. er interesseret i værdien af en funktion f i et bestemt punkt. Derned behøver man heller ikke at belygnre sig om konvergensen, hvis waveletfunktionen er begrænset.

En anden egenskab, som er meget vigtig for anvendelsen af denne type wavelet til komprimering er, at D_{2N} har N momenter lige med nul

$$\int \psi(x) x^k dx = 0 \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Det gör at koefficienterne $d_{j,k}$ i dekompositionen af et signal er 0 hvis signalet er et polynomium af grad $\leq N-1$, eller tæt på 0 hvis et polynomium af grad $\leq N-1$ er en god approksimation. Det kan så igen bruges til komprimering i f.eks. en entropi-kodning.

6.3 Shannon-wavelet

En wavelet der passer til den teori vi har præsenteret for "band-limited" wavelets er Shannon-waveletten der er defineret ved

$$\hat{\psi}_{Shannon}(t) = e^{it\frac{\pi}{2}} \chi_I(t) \quad I = [-2\pi, -\pi) \cup (\pi, 2\pi]$$

og dermed

$$\psi_{Shannon}(x) = -2 \frac{\sin(2\pi x) + \cos(\pi x)}{\pi(2x+1)}$$

Skaleringsfunktionen er

$$\varphi(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

og vi bemærker at vi har set lignende formler for. Sidst for Haar-waveletten, hvor $\hat{\varphi}_{Haar}(2\pi x) = |\varphi_{Shannon}(x)|$, men især fra sætning 5.1, hvor vi bruger $\varphi_{Shannon}(Bx - k)$ som basis for række-udviklingen af funktioner $f \in L^2(\mathbb{R})$.

For Shannon-waveletten er det særlig let at checke basis-lighederne som beskrevet i 3.1:

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j t)|^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |e^{2^{j-1}t} \chi_I(2^j t)|^2 = 1$$

Vi har nemlig for $t < 0$ at $2^j t \in [-2\pi, \pi)$ for præcis et j og på samme måde med $t > 0$ kun præcis et j så $2^j t \in (\pi, 2\pi]$.

Med samme argument får vi da også

$$\sum_{j=0}^{\infty} \hat{\psi}(2^j t) \overline{\hat{\psi}(2^j(t+2q\pi))} = \sum_{j=0}^{\infty} e^{i2^{j-1}t} \overline{e^{i2^{j-1}(t+2q\pi)} \chi_I(2^j(t+2q\pi))}$$

For $|t| > 2\pi$ er summen 0, da $\chi_I(2^j t) = 0$ for $j \in [0, \infty)$. For $|t| \leq 2\pi$ er summen 0, da $\chi_I(2^j(t+2q\pi)) = 0$ for q ulige.

6.4 Lemarié-Meyer-wavelets

For at beskrive Lemarié-Meyer-wavelet-familien skal vi introducere *klokke-funktion*, som er en glat udgave af indikator-funktionen. Den er essentelt 1 på et interval $(a + \epsilon, b - \epsilon)$, er voksende / aftagende på hhv. intervalerne $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ og $(b - \epsilon, b + \epsilon)$ og 0 ellers.

En præcis definition af klokke-funktionen kan findes i kapitel 1, afsnit 3 af [HW]. Lemarié-Meyer-waveletten er defineret ved

$$\hat{\psi}_{LM}(t) = b(t)e^{it\frac{t}{2}}$$

hvor b er en lige funktion (dvs. $b(-t) = b(t)$), hvor $b(t)|_{[0, \infty)}$ er en klokke-kurve for $[\pi, 2\pi)$ med $0 < \epsilon \leq \frac{1}{3}\pi$ og $\epsilon' = 2\epsilon$. Lemarié-Meyer-waveletten er dermed tæt knyttet til Shannon-waveletten og er også "band-limited" og dermed godt egnet til analysen af "band-limited"-funktioner, og er pga. den blødere klokke-funktion en bedre tilnærrelse end Shannon-waveletten til den reale verden, hvor et perfekt båndpas-filter ikke er muligt.

7 Appendix

7.1 Tal-eksempel - et 4x4-billede

Vi vil her presentere en detaljeret gennemgang af et tal-eksempel for detkompositionen og rekonstruktionen af et signal. Lad følgende "billede" være givet, hvor tallene repræsenterer farverværdier.

8	6	6	5
6	4	2	0
3	7	6	2
1	8	2	9

Vi vil bruge sætning 5.2 til at dekomponere det signal vi om lidt vil definere ud fra vores billede-matrix. Som skaleringsfunktion vælger vi Haar-skaleringsfunktionen $\varphi(x) = \chi_{[0,1)}(x)$. Det vi skal bruge er lavpas-filter-koefficienterne a_k :

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,1)}\left(\frac{1}{2}x\right) \chi_{[0,1)}(x - k) dx \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} & k = 0, 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \end{aligned}$$

Ved at bruge $b_k = (-1)^{k+1} \bar{a}_{1-k}$ får vi

$$b_k = \begin{cases} -\frac{1}{2} & k = 0 \\ \frac{1}{2} & k = 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Vi har så dekompositions-formlerne

$$\begin{aligned} c_{j-1,k} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (c_{j,2k} + c_{j,2k-1}) \\ d_{j-1,k} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (c_{j,2k-1} - c_{j,2k}) \end{aligned}$$

Vi lineariserer billedet på følgende måde:

Billedet deles i 4 kvadranter. Disse kvadranter deles igen i 4 kvadranter, osv, indtil en kvadrant består af kun 4 fejter. For vores billede er det allerede tilfældet efter den første inddeling. Vi starter nu med øverste venstre kvadrant. Vi vælger værdierne fra denne kvadrant i rækkefølgen

Oppe venstre	\Downarrow
Oppe højre	\Downarrow
Nede venstre	\Downarrow
Nede højre	\Downarrow

1	2	5	6
3	4	7	8
9	10	13	14
11	12	15	16

Figur 6: Udvalgsrækkefølge for billed-punkter

Når vi er færdig med denne kvadrant vælger vi næste kvadrant i den næst-større kvadrant efter ovenstående rækkefølge. Rækkefølgen kan også ses i figur

Grunden til denne rækkefølge er, at den samlør dataene, så alle dataer fra en kvadrant er samlet efter hinanden. Ville man ikke gøre det og laste dataene række for række, ville en rekonstruktion af dataene hvor man bare droppede den sidste halvdel føre til en fuld vertikal oplosning, men ingen horizontal oplosning, som ville kunne ses ved at de forskellige rækker har den rigtige gennemsnits-farve, men celleerne i rækken har alle den samme farve.

For vores eksempel betyder denne omsortering at vi får signalet

$$c_0 = \vec{s} = (8, 6, 5, 6, 5, 2, 0, 3, 7, 1, 8, 6, 2, 2, 9)$$

hvor vi indekserer elementerne startende med 1.

Vi beregner nu c_{-1} - og d_{-1} -koefficienterne. Her f.eks. $c_{-1,1}$ og $d_{-1,1}$:

$$c_{-1,1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_{0,2} + c_{0,1}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(6 + 8) = 7\sqrt{2}$$

og

$$d_{-1,1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_{0,1} - c_{0,2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(8 - 6) = \sqrt{2}$$

De to signaler bliver:

$$\begin{aligned} c_{-1} &= \sqrt{2} \left(7, \frac{11}{2}, \frac{11}{2}, 1, 5, \frac{9}{2}, 4, \frac{11}{2} \right) \\ d_{-1} &= \sqrt{2} \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, -2, -72, 2, -\frac{7}{2} \right) \end{aligned}$$

Vi vil i dette eksempel ikke kunne se nogen mulighed for komprimering, da billed-punkterne har tilfældig værdi og tilfældige signaler kan ikke komprimeres (meget).

Vi vil nu genskabe c_0 ud fra disse to signaler og brugte der til rekonstruktions-formlen.
Vi rekonstruerer $c_{0,1}$ og $c_{0,2}$:

$$\begin{aligned} c_{0,1} &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{-1,k} a_{2k-1} + d_{-1,k} b_{2k-1} \\ &= \sqrt{2} c_{-1,1} a_{2-1} + d_{-1,1} b_{2-1} \\ &= (7 + 1) = 8 \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} c_{0,2} &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{-1,k} a_{2k-2} + d_{-1,k} b_{2k-2} \\ &= \sqrt{2} c_{-1,1} a_{2-2} + d_{-1,1} b_{2-2} \\ &= (7 - 1) = 6 \end{aligned}$$

Vi fik som forventet de første to elementer i signalet \tilde{s} !

Frengangsmåden er her meget simpel, da kun 2 Haar-filterkoefficienterne er forskellig fra null. Det medfører at en konvolution, hvor filteret løbende bliver flyttet 2 trin videre langs signalet, ikke overlapper. Ville filteret have en længde længere end 2, vil der være overlap så længden af de to dekomponerede trækker kan have længden op til $\lceil \frac{N}{2} \rceil + \lceil \frac{L-2}{2} \rceil$ hvor N er signalets længde og L er filterets længde. Det viser sig dog, at det rekonstruerede signal har længde lig med det oprindelige signal.

8 Bibliografi

Brugt litteratur:

- [CDF] - "Biorthogonal bases of compactly supported wavelets" af Albert Cohen, Ingrid Daubechies, Jean-Christophe Feauveau, 1992 Comm. Pure & Appl. Math 45, pp. 485-560
- [EH] - "Measure theory, Fourth Edition" af Ernst Hansen, 2009 Department of Mathematical Science - University Copenhagen
- [HW] - "A First Course on Wavelets" af Eugenio Hernández og Guido Weiss, 1996 CRC Press LLC
- [ID] - "Ten lectures on wavelets", Ninth printing, af Ingrid Daubechies, 2006 SIAM
- [NWT] - "Asymptotics and Numerics of Zeros of Polynomials That Are Related to Daubechies Wavelets" af Nico M. Temme, 1997 Elsevier - Applied and Computational Harmonic Analysis - Volume 4, Issue 4, October 1997, Pages 414-428
<http://arxiv.org/pdf/math/9610225>
- [NY] - "An introduction to Hilbert Space", 12. printing, af Nicholas Young, 2008 Cambridge University Press
- [TL] - "Kalkulus", 3. udgave, af Tom Lindstrøm, 2006 Universitetsforlaget, Oslo